

# 带有保护区的单一渔业资源的离散动力学模型分析

顾恩国 李晓东 向 蕾 李远平

(中南民族大学 数学与统计学学院 武汉 430074)

**摘要** 假设单一渔业资源分属于两个区域,即保护区和捕捞区,建立了一个离散的渔业资源储量模型,分析了正平衡点的存在性、稳定性及局部分叉,用数值模拟的方法验证了正平衡点的局部分叉,并用全局分析方法描述了保护区面积比例对单一渔业资源可持续利用的影响。

**关键词** 正平衡点的稳定性; flip 分叉; 全局分析方法; 可行吸引域

**中图分类号** F133.3 **文献标识码** A **文章编号** 1672-4321(2013)01-0097-05

## Analysis of Discrete Dynamical Model of Single-Species Fishery with a Protected Area

Gu Enguo, Li Xiaodong, Xiang Lei, Li Yuanping

(College of Mathematics and Statistics, South-Central University for Nationalities, Wuhan 430074, China)

**Abstract** In this paper, the single-species fishery resource is subdivided into two zones, a protected area and a fishing area, and then a discrete dynamical model is established. The existence of positive fixed points, stability and local bifurcations are analyzed, the numerical simulation is used to verify the local bifurcations of fixed points, and the global method is applied to analyze the influence of the proportion of the protected area on the sustainable utilization of the fishery resources.

**Keywords** stability of the positive equilibrium; flip bifurcation; global method; feasible domain

公共渔业资源是人类重要的食物来源,随着社会的发展和人口数量的急速增长,对公共渔业资源的过度捕捞已严重影响到其再生能力,进而影响了人类对公共渔业资源的可持续利用<sup>[1-2]</sup>。因此,如何做到既满足人类对渔业资源的合理需求,又保证公共渔业资源的持续再生能力,越来越引起人们的重视。对于公共渔业资源的可持续利用问题,国内外的学者建立了大量模型<sup>[3-6]</sup>,但考虑保护区面积变化对渔业资源可持续利用的影响这方面的研究还很少。针对带有保护区的公共渔业资源,运用离散动力学知识研究保护区面积比例和捕捞力度变化对渔业资源储量的影响,无论是在学术上还是渔业资源管理上都具有重要的意义。因此,本文假设渔业资源为单一渔业资源,并分属于保护区和捕捞区,鱼在两个区域之间按照一定的迁移率自由迁移。在此条件下

构造离散动力学模型,并以此模型来研究渔业资源保持可持续再生能力的条件,包括保护区面积比例及捕捞力度对渔业资源最终演化产生的影响,其结果能够为渔业资源管理提供理论参考。

## 1 模型的建立

本文考虑构成单一渔业资源区域的保护区和捕捞区内鱼的数量在  $t$  时刻分别为  $X_1(t)$  和  $X_2(t)$ ,两个区域内其自然增长率均为  $r$ ,鱼在两个区域之间的迁移率为  $\beta$ ,保护区占整个渔业资源区域的面积比例为  $s$  ( $0 < s < 1$ ),保护区和捕捞区的自然承载能力与各自所占的面积比例有关,分别为  $sk$  和  $(1-s)k$ ;考虑到捕捞区有捕捞行为,我们对捕捞区设一捕捞函数  $qEX_2(t)$ ,其中  $q$  表示捕捞能力,  $E$  表示捕捞

收稿日期 2012-12-21

作者简介 顾恩国(1964-)男,教授,博士,研究方向:非线性动力学应用, E-mail: guenguo@163.com

基金项目 国家自然科学基金资助项目(10871209)

力度. 根据以上假设, 分别对保护区和捕捞区建立如下模型:

$$\begin{cases} X_1(t+1) = X_1(t) + rX_1(t) \left(1 - \frac{X_1(t)}{sk}\right) - \\ \beta \left( \frac{X_1(t)}{sk} - \frac{X_2(t)}{(1-s)k} \right), & (\text{保护区}) \\ X_2(t+1) = X_2(t) + rX_2(t) \left(1 - \frac{X_2(t)}{(1-s)k}\right) + \\ \beta \left( \frac{X_1(t)}{sk} - \frac{X_2(t)}{(1-s)k} \right) - qEX_2(t). & (\text{捕捞区}) \end{cases} \quad (1)$$

对差分方程(1)进行标准化. 令  $\frac{X_1(t)}{k} = Y_1(t)$ ,  $\frac{X_2(t)}{k} = Y_2(t)$ , 在新得到的差分方程中以  $X_1(t)$  替换  $Y_1(t)$ ,  $X_2(t)$  替换  $Y_2(t)$ , 并记  $\sigma = \frac{\beta}{k}$ , 得到带有保护区的单一渔业资源的离散动力学模型为:

$$\begin{cases} X_1(t+1) = X_1(t) + rX_1(t) \left(1 - \frac{X_1(t)}{s}\right) - \\ \sigma \left( \frac{X_1(t)}{s} - \frac{X_2(t)}{1-s} \right), & (\text{保护区}) \\ X_2(t+1) = X_2(t) + rX_2(t) \left(1 - \frac{X_2(t)}{1-s}\right) + \\ \sigma \left( \frac{X_1(t)}{s} - \frac{X_2(t)}{1-s} \right) - qEX_2(t). & (\text{捕捞区}) \end{cases} \quad (2)$$

此时有  $0 \leq X_1(t) \leq 1$ ,  $0 \leq X_2(t) \leq 1$ .

## 2 正平衡点的存在性

根据平衡点的定义, 系统(2)的平衡点是下面这个以  $X_1$  和  $X_2$  为未知元的二元二次方程组的解:

$$\begin{cases} X_1 \left( r - \frac{\sigma}{s} - \frac{rX_1}{s} \right) + \frac{\sigma X_2}{1-s} = 0, \\ X_2 \left( r - \frac{\sigma}{1-s} - qE - \frac{rX_2}{1-s} \right) + \frac{\sigma X_1}{s} = 0. \end{cases} \quad (3)$$

即是以下两条凸抛物线的交点:

$$\begin{cases} X_1 = f_1(X_2) = \frac{rs}{(1-s)\sigma} X_2 \left[ X_2 - \left(1-s - \frac{qE(1-s)}{r} - \frac{\sigma}{r}\right) \right], \\ X_2 = f_2(X_1) = \frac{r(1-s)}{\sigma} X_1 \left[ X_1 - \left(s - \frac{\sigma}{r}\right) \right]. \end{cases} \quad (4)$$

首先, 原点  $X^0 = (0, 0)$  显然是系统(2)的平衡点. 关于正平衡点的存在性, 我们有下面3个命题成立(因篇幅原因证明过程略).

命题1 若  $s - \frac{\sigma}{r} > 0$ , 则系统(2)一定有唯一的

一个正平衡点  $(X_1^*, X_2^*)$ , 其中  $X_1^* \in \left(s - \frac{\sigma}{r}, s\right]$ ,  $X_2^* = \max(0, f_2(X_1^*)) \in \left(\max\left(0, \frac{(r-qE)(1-s) - \sigma}{r}\right), 1-s\right]$ . 特别地, 当  $E=0$  时  $X_1^* = s$ ,  $X_2^* = 1-s$ ;  $\lim_{qE \rightarrow +\infty} X_2^* = 0^+$ ,  $\lim_{qE \rightarrow +\infty} X_1^* = s - \frac{\sigma}{r}$ .

命题2 若  $1-s - \frac{qE(1-s)}{r} - \frac{\sigma}{r} > 0$ , 则系统(2)一定有唯一的一个正平衡点  $(X_1^*, X_2^*)$ , 其中  $X_2^* \in \left(1-s - \frac{qE(1-s)}{r}, \frac{1}{2}(1-s - qE(1-s)/r - \sigma/r + \sqrt{((r-qE)(1-s) + \sigma)^2 + 4qE\sigma(1-s)/r})\right]$ ,  $X_1^* = \max(0, f_1(X_2^*)) \in \left(\max\left(s - \frac{\sigma}{r}, s - \frac{qEs}{r}\right), s\right]$ . 特别地, 当  $E=0$  时  $X_1^* = s$ ,  $X_2^* = 1-s$ .

命题3 若  $s - \frac{\sigma}{r} < 0$  且  $1-s - \frac{qE(1-s)}{r} - \frac{\sigma}{r} < 0$ , 则当系统(2)满足  $1 - \frac{qE}{r} - \frac{s\sigma}{(sr-\sigma)(1-s)} > 0$  时, 一定有唯一的一个正平衡点  $(X_1^*, X_2^*)$ , 其中:

$$\begin{aligned} X_1^* &\in \left(0, \min\left(1, \frac{sr - \sigma + \sqrt{(sr - \sigma)^2 + \frac{4sr\sigma}{1-s}}}{2r}\right)\right), \\ X_2^* &\in \left(0, \min\left(1, \left[\frac{(r-qE)(1-s) - \sigma + \sqrt{((r-qE)(1-s) - \sigma)^2 + \frac{4\sigma(1-s)r}{s}}\right]/2r\right)\right). \end{aligned}$$

特别地, 当  $E=0$  时  $X_1^* = s$ ,  $X_2^* = 1-s$ .

## 3 正平衡点的局部稳定性及分叉

我们仅对  $s - \frac{\sigma}{r} > 0$  时的情况进行讨论. 由命题1知道系统(2)存在一个唯一的正平衡点, 但这还不足以得出系统(2)所代表的渔业资源可持续利用. 为了得到渔业资源可持续利用的条件, 我们开始讨论系统(2)的两个平衡点的稳定性.

差分方程(2)的 Jacobian 矩阵是:

$$J = \begin{bmatrix} 1+r - \frac{2rX_1}{s} - \frac{\sigma}{s} & \frac{\sigma}{1-s} \\ \frac{\sigma}{s} & 1+r - \frac{2rX_2}{1-s} - \frac{\sigma}{1-s} - qE \end{bmatrix}. \quad (5)$$

通过计算所得 Jacobian 矩阵的特征值  $\lambda_1, \lambda_2$  得:

$$\lambda_1 = 1 + r - \frac{qE}{2} + \frac{2rs(X_1 - X_2) - 2rX_1}{2s - 2s^2} - \frac{\sigma}{2s - 2s^2} - \frac{\sqrt{M}}{2s - 2s^2} \quad (6)$$

$$\lambda_2 = 1 + r - \frac{qE}{2} + \frac{2rs(X_1 - X_2) - 2rX_1}{2s - 2s^2} - \frac{\sigma}{2s - 2s^2} + \frac{\sqrt{M}}{2s - 2s^2} \quad (7)$$

其中  $M = (qEs(1-s) - 2r(1-s)X_1 + 2rsX_2 - \sigma + 2\sigma s)^2 + 4\sigma^2 s(1-s)$ . 由  $M > 0$  知,  $\lambda_1, \lambda_2$  均为实数, 且有  $\lambda_1 < \lambda_2$ .

对平衡点  $X^0 = (0, 0)$  的稳定性, 在没有捕捞行为 ( $E = 0$ ) 的情况下,  $\lambda_2 = 1 + r > 1$ , 此时  $X^0 = (0, 0)$  是不稳定的.

考虑到系统 (2) 所代表的实际意义, 我们开始讨论系统 (2) 的正平衡点的稳定性. 由正平衡点的唯一性知, 系统 (2) 的正平衡点不可能产生 Fold 分叉; 由 Jacobian 矩阵 (5) 的特征值  $\lambda_1, \lambda_2$  均为实数知, 系统 (2) 的正平衡点不可能产生 Neimark-Hopf 分叉. 所以, 系统 (2) 的正平衡点只可能产生 Flip 分叉. 当  $\frac{\sigma}{s} < r < 2 + \frac{\sigma}{s} qE - \frac{\sigma}{s} + \frac{\sigma}{1-s} > 4$  时, 从正平衡点是不稳定的节点的情况开始 ( $\lambda_1, \lambda_2 < -1$ ), 存在一个值, 当  $E$  的取值超过该值时, 有  $-1 < \lambda_2 < 1$ , 此时, 正平衡点是稳定的节点还是鞍点, 完全由  $\lambda_1$  的值确定, 若  $\lambda_1 > -1$ , 则正平衡点是稳定的节点, 若  $\lambda_1 < -1$ , 则正平衡点是鞍点.

现在我们从没有捕捞行为 (即  $E = 0$ ) 的情况开始讨论. 当  $E = 0$  时, 由命题 1 知, 系统 (2) 存在唯一的正平衡点  $(X_1^*, X_2^*) = (s, 1-s)$ , 通过计算知此时 Jacobian 矩阵 (5) 的两个特征值分别为:  $\lambda_1 = 1 - r - \frac{\sigma}{s} - \frac{\sigma}{1-s}, \lambda_2 = 1 - r$ .

当  $r + \frac{\sigma}{s} + \frac{\sigma}{1-s} < 2$  (在没有捕捞行为情况下, 当鱼群的自然增长率  $r$  及鱼群在保护区和捕捞区之间的迁移率  $\beta$  与自然承载能力  $k$  的比值  $\sigma = \frac{\beta}{k}$  都充分小) 时, 有  $-1 < \lambda_1, \lambda_2 < 1$ . 根据动力系统理论<sup>[7]</sup>, 此时  $(X_1^*, X_2^*)$  是稳定的节点; 当  $r + \frac{\sigma}{s} + \frac{\sigma}{1-s} = 2$  时, 由于此时  $\lambda_1 = -1$ , 所以  $(X_1^*, X_2^*) = (s, 1-s)$  通过

Flip 分叉失去原有的稳定性; 当  $2 - \frac{\sigma}{s} - \frac{\sigma}{1-s} < r < 2$  时,  $\lambda_1 < -1, -1 < \lambda_2 < 1$ , 此时  $(X_1^*, X_2^*)$  是一个鞍点; 当  $r > 2$  时, 有  $\lambda_1, \lambda_2 < -1$ , 此时  $(X_1^*, X_2^*)$  是不稳定的节点.

进一步, 由  $\lambda_1 < \lambda_2 < 1$  及前面对  $\lambda_1$  的分析可知, 当  $r + \frac{\sigma}{s} + \frac{\sigma}{1-s} < 2$  时, 存在一个分叉值  $b^* \in (0, A + \frac{\sigma}{s} - \frac{\sigma}{1-s})$ , 使得正平衡点  $(X_1^*, X_2^*)$  在  $E = \frac{1}{q}b^*$  时, 通过 Flip 分叉失去原有的稳定性 (当  $qE - \frac{\sigma}{s} + \frac{\sigma}{1-s} > 4$  时,  $\lambda_1 < -1$ , 故得此结论). 当  $r + \frac{\sigma}{s} + \frac{\sigma}{1-s} > 2$  时, 正平衡点在  $E = 0$  时是不稳定的, 即存在与若干 Flip 分叉相联系的后向 Flip 分叉; 换言之, 当增加  $E$  的值时,  $(X_1^*, X_2^*)$  首先通过一个后向 Flip 分叉达到稳定态, 继续增加  $E$  的值, 则  $(X_1^*, X_2^*)$  通过一个 Flip 分叉失去稳定态.

这一结果不仅在动力学的研究上非常有意义, 而且在渔业资源的实际管理上也非常有意义. 如果我们能够找到一个  $E$  的区间, 在这个区间里, 系统 (2) 的 Jacobian 矩阵的两个特征值的模都小于 1, 此时正平衡点具有稳定性. 这就是说, 在资源管理上, 我们能够通过控制在捕捞区的捕捞力度实现对渔业资源的持续利用.

上述后向 Flip 分叉和 Flip 分叉都可以利用数值方法得到验证 (如图 1). 在图 1 中, 我们取  $r = 1.98, s = 0.46, q = 10, \beta = 0.3125, k = 2.5, \sigma = \frac{\beta}{k} = 0.125$ , 此时有  $r + \frac{\sigma}{s} + \frac{\sigma}{1-s} > 2$ , 因此由前面的讨论可知,  $E = 0, qE = 0$  时, 系统 (2) 的正平衡点  $(X_1^*, X_2^*) = (s, 1-s)$  是不稳定的. 从图 1(a), (b) 可知, 随着  $E$  在区间  $[0, 0.45]$  上取值不断增大, 我们可以看到系统 (2) 的正平衡点通过后向 Flip 分叉由二周期环获得稳定性, 随着  $E$  继续增大, 正平衡点失去稳定性并经由 Flip 分叉再次得到二周期环. 从图 1(b) 可以看出, 捕捞区的鱼存量随着  $E$  的增大而减少, 当  $E \approx 0.307$  时, 捕捞区渔业资源失去再生能力 (枯竭).

以上我们对  $s$  取定值, 分析了随着  $E$  取值变化时系统 (2) 的正平衡点的稳定性. 同样, 我们可以对  $E$  取定值, 分析随着  $s$  取值的变化, 系统 (2) 的正平

平衡点的稳定性. 在图2中,我们取  $r = 1.72$   $q = 10$   $E = 0.2$   $\beta = 0.5$   $k = 2.5$   $\sigma = \frac{\beta}{k} = 0.2$ . 从图2(a), (b)可知,当  $0.147 < s < 0.473$  时,系统(2)的正平衡点具有稳定性;当  $s \approx 0.473$  时,产生 flip 分叉;当

$s > 0.748$  时,产生4周期点,随着  $s$  增大,最后保护区的渔业资源在某一范围内产生随机波动,即达到混沌状态. 从图2(b)可知当  $s \approx 0.609$  时,捕捞区渔业资源失去再生能力(枯竭).

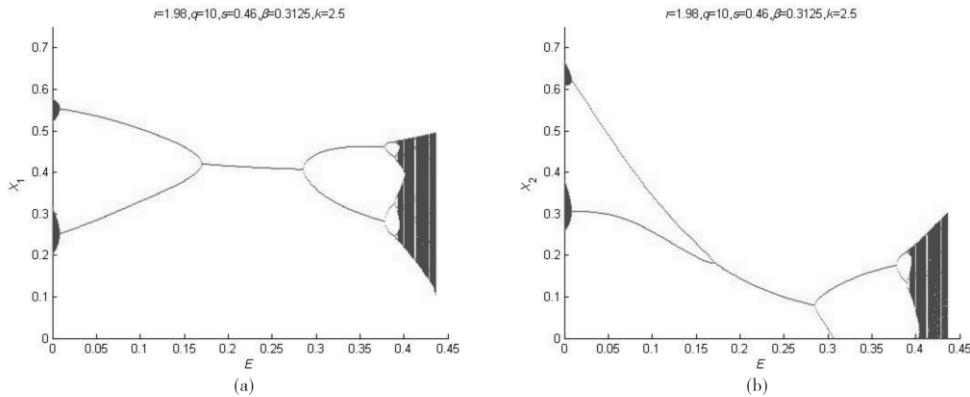


图1 系统(2)关于参数  $r = 1.98$   $s = 0.46$   $q = 10$   $\beta = 0.3125$   $k = 2.5$  随捕捞力度  $E$  变化的分叉图  
Fig. 1 Bifurcation diagram of the system (2) with respect to the fishing efforts  $E$ , the set of parameters is  $r = 1.98$   $s = 0.46$   $q = 10$   $\beta = 0.3125$   $k = 2.5$

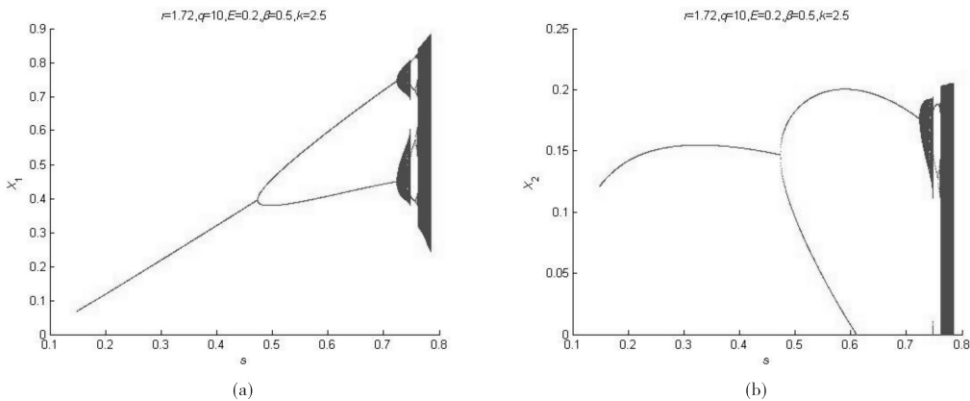


图2 系统(2)关于参数  $r = 1.72$   $q = 10$   $E = 0.2$   $\beta = 0.5$   $k = 2.5$  随保护区面积比例  $s$  变化的分叉图  
Fig. 2 Bifurcation diagram of the system (2) with respect to the proportion of protected area  $s$ , the set of parameters is  $r = 1.72$   $q = 10$   $E = 0.2$   $\beta = 0.5$   $k = 2.5$

### 4 正平衡点的全局分析

通过对正平衡态可行吸引域性质的分析,可以得出带有保护区的单一渔业资源储量在怎样的条件下是维持资源再生能力还是最终导致资源枯竭. 本文主要采用数值模拟的方法来分析系统(2)的可行吸引域结构<sup>[8,9]</sup>. 根据系统(2)所代表的实际意义,我们仅研究在  $R^2_+ = \{(X_1, X_2) | X_1 \geq 0, X_2 \geq 0\}$  中  $X_1$  和  $X_2$  满足的初始条件. 若鱼的数量是非正值,将无法实现对渔业资源的可持续利用. 通过数值试验,我

们可以研究随着保护区面积比例的变化,可行吸引域的变化情况.

由于系统(2)的可行域的边界由两坐标轴  $X_1 = \{(X_1, X_2) | X_2 = 0, (X_1, X_2) \in R^2_+\}$  和  $X_2 = \{(X_1, X_2) | X_1 = 0, (X_1, X_2) \in R^2_+\}$  以及  $X_1, X_2$  的任意阶前像确定. 先求出  $X_1$  和  $X_2$  的一阶前像分别为:

$$X_1^{-1}: X_1 = \frac{s}{\sigma} X_2 \left( \frac{r}{1-s} X_2 - r - 1 + qE + \frac{\sigma}{1-s} \right). \quad (8)$$

$$X_2^{-1}: X_2 = \frac{1-s}{\sigma} X_1 \left( \frac{r}{s} X_1 - r - 1 + \frac{\sigma}{s} \right). \quad (9)$$

记  $D_0$  为两条抛物线  $X_1^{-1}$  和  $X_2^{-1}$  所围成的区域

在第一象限的限制区域, 则  $D_0$  给出了所有可行吸引域和有界吸引子的范围. 可行吸引域的大小或者吸引子与可行吸引域边界的距离可以反映系统鲁棒性 (即系统稳定性抗外界干扰的能力). 在图 3 中, 我们取  $r=1.72$ ,  $q=10$ ,  $E=0.2$ ,  $\beta=0.5$ ,  $k=2.5$ ,  $\sigma = \frac{\beta}{k} = 0.2$ . 正平衡态的可行吸引域用深灰色表示, 不可行吸引域用浅灰色表示, 吸引子用黑色表示. 当

$0.065 < s < 0.473$  时, 系统(2)的正平衡点具有稳定性, 在此区间内, 随着  $s$  取值的增大, 可行域发生变化, 面积有增加的趋势, 如图 3 中的 (a) (d); 当  $s > 0.473$  时, 吸引子变成二周期点, 如图 3 中的 (e), (f) 并随着  $s$  取值的增大, 二周期点离可行吸引域的边界越来越近, 当  $s > 0.609$  时, 吸引子消失, 捕捞区的渔业资源枯竭.

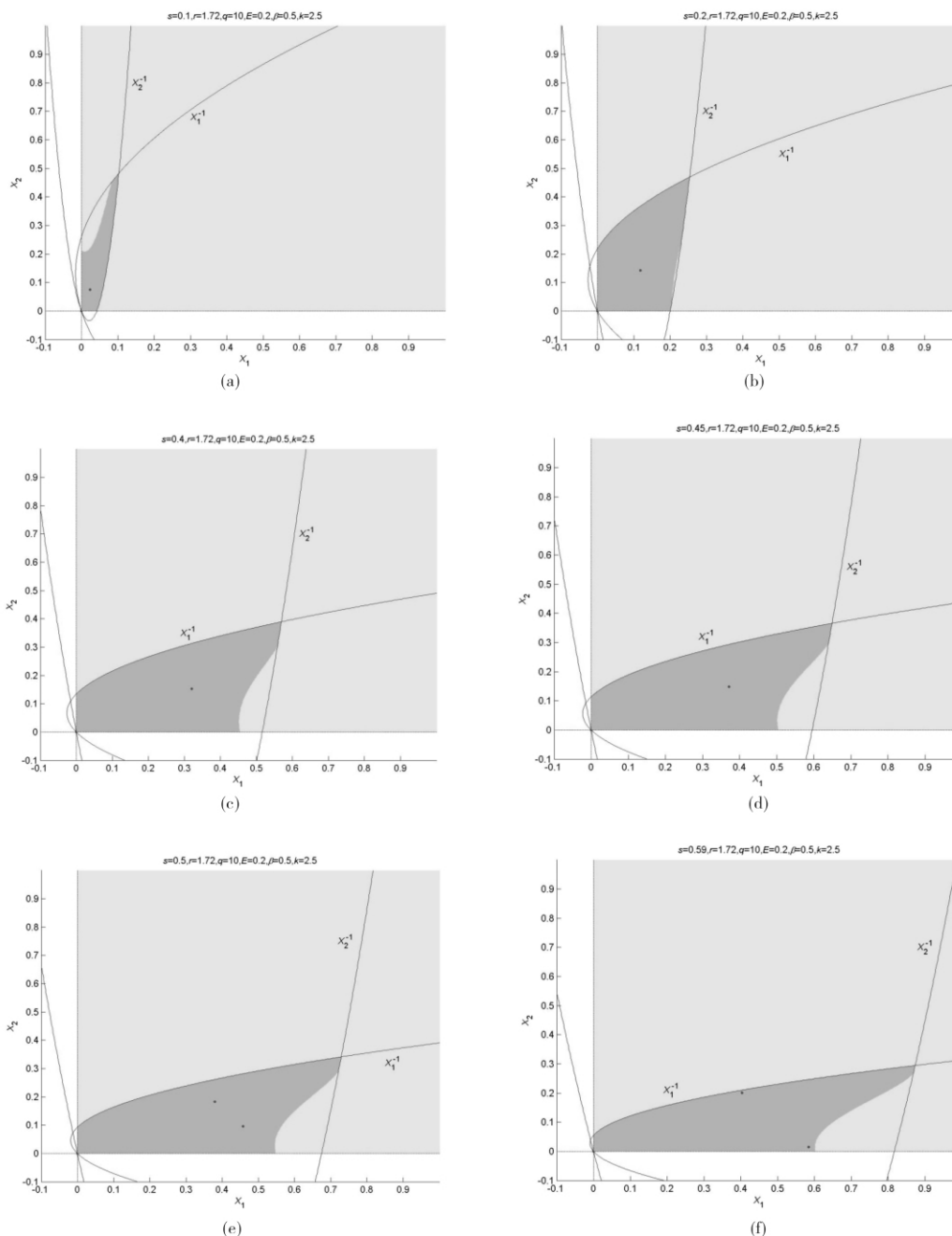


图 3 系统(2)关于参数  $r=1.72$ ,  $q=10$ ,  $E=0.2$ ,  $\beta=0.5$ ,  $k=2.5$  随着保护区面积比例  $s$  变化的可行域  
 Fig.3 Feasible domains of the system (2) with respect to the proportion of protected area  $s$ , the set of parameters is  $r=1.72$ ,  $q=10$ ,  $E=0.2$ ,  $\beta=0.5$ ,  $k=2.5$

(下转第 115 页)

(2) 若  $f(x)$  在  $I \cap E$  上满足:  $f'(x) \geq 0$ , 则  $f(x)$  在区间  $I$  上单调递增.

证明 因为  $E$  为至多可数集, 则  $f(E)$  必为至多可数集, 从而  $E$  相对  $f$  具有  $N$ -性质, 所以, 由定理 2 和推论 4 即得结论.

注: 推论 5 中, 当  $E = \emptyset$  时, 就是文献 [5, 6] 中的结论.

#### 参 考 文 献

- [1] Apostol T M. 数学分析 [M]. 2 版. 邢富冲, 邢辰, 李松洁, 译. 北京: 机械工业出版社, 2006: 75-81.  
[2] 唐艳蕾. 连续函数单调性与可导性的充分条件 [J]. 忻

州师范学院学报, 2002, 18(3): 56.

- [3] 杨军. 用单侧导数判别函数的单调性 [J]. 四川师范学院学报: 自然科学版, 2000, 21(1): 108-109.  
[4] 邱德华, 李水田. 函数一致连续的几个充分条件 [J]. 大学数学, 2006, 23(3): 136-138.  
[5] 陶有德. 关于 Schwarz 导数的注记 [J]. 信阳师范学院学报, 2004, 17(1): 8-10.  
[6] 刘三阳, 于力. 不可微函数单调性的充要条件 [J]. 西安电子科技大学学报, 1995, 22(1): 74-77.  
[7] Minch R A. Application of symmetric derivatives in mathematical programming [J]. Mathematical Programming, 1971, 1: 307-320.  
[8] 江泽坚, 吴智泉, 纪友清. 实变函数论 [M]. 3 版. 北京: 高等教育出版社, 2007: 175-176.

(上接第 101 页)

## 5 结 语

本文提出了带有保护区的单一渔业资源的离散动力学模型, 并对模型进行了非线性动力学分析, 讨论了正平衡点的存在性、稳定性及局部分叉, 并对正平衡态进行了全局分析. 对于满足人类对渔业资源的可持续利用的问题, 本文给出了较好的回答. 我们发现, 保护区面积和捕捞力度对公共渔业资源的可持续再生能力具有显著的影响, 当捕捞力度  $E$  过大时, 捕捞区的渔业资源可能枯竭 (当  $E > 0.307$  时, 资源稳定到负的平衡态); 当保护区面积  $s$  过大或者过小时, 都不利于人类对渔业资源的可持续利用, 当  $s$  在一定范围 (如图 3 中的  $0.065 < s < 0.473$ ) 内取值时, 系统 (2) 始终稳定在正平衡点, 并具有较大的可行吸引域面积, 因此针对不同的自然环境因素和捕捞力度, 要保证渔业资源的可持续利用, 需要确定合适的保护区面积, 这对于公共渔业资源管理决策者制定资源利用和保护政策具有重要的参考意义.

#### 参 考 文 献

- [1] Food and Agriculture Organization. The state of world fisheries and aquaculture [R]. Sofia: FAO, 2010: 3-12.

- [2] Garcia S M, Grainger R J R. Gloom and doom? The future of marine capture fisheries [J]. Philosophical Transactions of the Royal Society B: Biological Sciences, 2005, 360: 21-46.  
[3] Clark C W. Mathematical bioeconomics: the optimal management of renewable resources [M]. New York: Wiley, 1976.  
[4] Bischi G I, Kopel M, Szidarovszky F. Expectation-stock dynamics in multi-agent fisheries [J]. Annals of Operations Research, 2005, 137(1): 299-329.  
[5] Kar T K, Matsuda H. A bioeconomic model of a single-species fishery with a marine reserve [J]. Journal of Environmental Management, 2008, 86: 171-180.  
[6] Bischi G I, Lamantia F. Harvesting dynamics in protected and unprotected areas [J]. Journal of Economic Behavior & Organization, 2007, 62: 348-370.  
[7] Saber N E. Discrete chaos [M]. New York: Chapman & Hall/CRC, 2000: 180-234.  
[8] Gu Enguo, Ruan Jiong. On some global bifurcations of domains of feasible trajectories: analysis of recurrence equations [J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2005, 15(5): 1625-1639.  
[9] Gu Enguo, Huang Yibing. Global bifurcations of domains of feasible trajectories: analysis of a predator-prey model [J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2006, 16(9): 2601-2613.