

# 基于最大后验概率的 $la$ 范数去噪方法

宁 娣 岳晨曦

(中南民族大学 数学与统计学学院, 武汉 430074)

**摘 要** 从观测模型和先验模型入手,深入分析了在图像去噪过程中如何在边缘保护和去除噪声之间寻找平衡,针对 TV 先验模型在边缘保护和纹理保护中的不足,提出了新的基于最大后验概率的  $la$  范数去噪方法,该方法更好地保护了图像的边缘,同时使得在平滑区域产生的阶梯效应减少.数值实验进一步验证了该方法的正确性和有效性.

**关键词** 图像去噪;  $la$  范数模型; TV 范数模型; 小波去噪; 最大后验概率

**中图分类号** TP391.41; O212.8 **文献标识码** A **文章编号** 1672-4321(2017)01-0128-04

## Denoising Method Based on the MAP with $la$ Norm

Ning Di, Yue Chenxi

(College of Mathematics and Statistics, South-Central University for Nationalities, Wuhan 430074, China)

**Abstract** In the paper, from the observation model and a priori model, the problem of image denoising is discussed, and how to find a balance between edge protection and image denoising is analyzed in depth. In addition, aiming at the advantages and disadvantages of TV prior model on the edge protection and texture protect, the new denoising method named  $la$  norm based on Maximum A Posteriori Probability(MAP) is put forward. This method provides better protection of the edge of the image. Furthermore, the staircase effect in smooth regions is reduced. Numerical simulations are further provided to verify the feasibility and effectiveness of the theoretical results.

**Keywords** image denoising;  $la$  norm model; TV norm model; wavelet denoising; MAP

对被噪声污染的图像进行去噪是图像处理的经典问题,其目的在于尽可能多的滤除噪声的同时,又能最大限度地保留信号的原始信息.图像去噪作为图像处理技术的重要组成部分,经历了半个多世纪的发展,出现了各种性能优异的去噪方法,如均值去噪方法、中值去噪方法、全变分(TV)去噪方法、小波方法等.

本文从图像去噪中的边缘保护问题开展研究,深入分析了现阶段存在于图像去噪过程中边缘保护与纹理保护这一矛盾体.从不同角度分析了图像过平滑、边缘模糊的原因,并在最大后验概率的框架下,提出了以 TV 范数去噪先验模型为基础进行改进的一种去噪模型,即  $la$  范数先验模型.该模型保留了 TV 范数模型的优点,并对其在边缘保护上的

缺点进行了改进.实验表明,与 TV 范数去噪方法和小波方法相比,该方法的去噪效果得到了明显提高.

## 1 最大后验概率估计

图像去噪的实质是估计理论,其中贝叶斯理论<sup>[1-2]</sup>有着十分重要的地位.设给定的原始图像为  $f$ ,噪声图像为  $g$ ,贝叶斯公式为:

$$p(f|g) = \frac{p(g|f)p(f)}{p(g)}, \quad (1)$$

其中  $p(g|f)$  为似然密度函数,  $p(f)$  为先验密度函数,  $p(f|g)$  为后验密度函数.最大后验概率 MAP 估计是在  $g$  已知的条件下求  $p(f|g)$  取值最大的  $f$ .由贝叶斯准则可知,对(1)式求最大值等价于:

收稿日期 2016-09-25

作者简介 宁娣(1981-),女,讲师,博士,研究方向:混沌控制、复杂动力网络, E-mail: ningdi0224@163.com

基金项目 全国统计科学研究项目(2014LY020)

$$f = \arg \max_f p(f | g) = \arg \max_f \{ p(g | f) p(f) \}, \quad (2)$$

其对数形式为:

$$f = \arg \min_f \{ -\lg p(f | g) \} = \arg \min_f \{ -\lg p(g | f) - \lg p(f) \}. \quad (3)$$

通过把噪声模型和图像先验模型的结合代入上式, 可得到目标函数.

## 2 $la$ 范数先验模型的提出

1992 年, Rudin、Osher 和 Fatime 提出了一种基于全变分(TV)模型的去噪方法, 该方法实质上就是各向异性扩散, 它能在去噪的同时很好地保持图像的边缘, 但由于 TV 范数二阶偏微分方程的解为分段长值, 从而导致了阶梯效应, 因此设想寻找一种模型, 既可保留 TV 范数对边缘的保护优势, 又能对细节区域作出良好的处理.

基于这种思想, 本文提出了一种  $la$  范数先验模型, 并在 MAP 的框架下, 将该先验模型应用到图像复原中.  $la$  范数是一种新的范数, 它以 TV 范数为基础, 在不同的局部特征下, 该范数可以自适应的去分配各种范数的权重, 达到保护边缘和抑制噪声的效果.  $la$  范数同时又保留了 TV 范数对图像边缘的保护, 使得该模型可以更好地在图像去噪和保留其层次之间找到一个平衡.

构造  $la$  范数的自适应函数为:

$$\rho(x, a) = a \sqrt{a^2 + x^2} - a^2, \quad (4)$$

其中  $a$  是正标量值,  $\rho(x, a)$  测量梯度  $x$  的水平方向和垂直方向的梯度值.

设  $u(x, y)$  是原始图像, 其规模为  $P_1 N_1 \times P_2 N_2$ ,  $N_1 \times N_2$  为每一个观测图像的规模,  $P_1$  和  $P_2$  分别表示在水平方向和垂直方向的采样因素.  $N = P_1 N_1 \times P_2 N_2$  为像素点的数量, 在像素为  $N$  的噪声图片中, 新图像的自适应模型定义为:

$$p(u | \alpha) \propto (\alpha_1 \alpha_2)^{N/4} \cdot \exp \left\{ - \sum_{i=1}^N [\alpha_1 \rho(\nabla_i^x u, \alpha_{i,1}) + \alpha_2 \rho(\nabla_i^y u, \alpha_{i,2})] \right\}, \quad (5)$$

这里, 符号  $\nabla_i^x u$  和  $\nabla_i^y u$  分别代表了像素  $i$  的水平方向和垂直方向的梯度,  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$  是关于这个先验模型正则化程度的超参数,  $\alpha_{i,1}$  和  $\alpha_{i,2}$  代表了测量水平和垂直梯度值的自适应范数的规模参数<sup>[3]</sup>.

对(5)式两边取对数, 可得:

$$\lg(p(u | \alpha)) \propto - \sum_{i=1}^N [\alpha_1 \rho(\nabla_i^x u, \alpha_{i,1}) + \alpha_2 \rho(\nabla_i^y u, \alpha_{i,2})], \quad (6)$$

即  $\lg(p(u | \alpha))$  正比于  $\rho(\nabla_i^x u, \alpha_{i,1})$  和  $\rho(\nabla_i^y u, \alpha_{i,2})$  的线性组合,  $i = 1, 2, \dots, N$ . 因为  $\rho(u, a)$  是严格的凸函数<sup>[4]</sup>, 所以(6)是严格凸函数. 另外,  $\lg(p(u | \alpha))$  是自适应的, 这是因为当  $a$  固定时,  $\rho(u, a)$  的近似值由下面的近似式决定:

$$\rho(x, a) \approx \frac{1}{2} x^2, \text{ 当 } x \rightarrow 0. \quad (7)$$

$$\rho(x, a) \approx a |x| - a^2, \text{ 当 } x \rightarrow \infty. \quad (8)$$

因此(6)式中的  $\rho(\nabla_i^x u, \alpha_{i,1})$  和  $\rho(\nabla_i^y u, \alpha_{i,2})$  可由(7)式中的  $L_2$  范数和(8)式中的  $L_1$  范数表示.

令  $F = \alpha_1 \rho(\nabla_i^x u, \alpha_{i,1}) + \alpha_2 \rho(\nabla_i^y u, \alpha_{i,2})$ , 则  $F$  可以近似于:

$$F \approx \frac{\alpha_1}{2} |\nabla_i^x u|^2 + \alpha_2 (a_{i,2} |\nabla_i^y u| - (a_{i,2})^2), \text{ 当 } |\nabla_i^x u| \rightarrow 0, |\nabla_i^y u| \rightarrow \infty. \quad (9)$$

$$F \approx \alpha_1 (a_{i,1} |\nabla_i^x u| - (a_{i,1})^2) + \frac{\alpha_2}{2} |\nabla_i^y u|^2, \text{ 当 } |\nabla_i^x u| \rightarrow \infty, |\nabla_i^y u| \rightarrow 0. \quad (10)$$

$$F \approx \alpha_1 (a_{i,1} |\nabla_i^x u| - (a_{i,1})^2) + \alpha_2 (a_{i,2} |\nabla_i^y u| - (a_{i,2})^2), \text{ 当 } |\nabla_i^x u| \rightarrow \infty, |\nabla_i^y u| \rightarrow 0. \quad (11)$$

$$F \approx \frac{\alpha_1}{2} |\nabla_i^x u|^2 + \frac{\alpha_2}{2} |\nabla_i^y u|^2, \text{ 当 } |\nabla_i^x u| \rightarrow 0, |\nabla_i^y u| \rightarrow 0. \quad (12)$$

设  $v(x, y)$  为含噪声图像, 基于上面的理论, 构造目标函数:

$$G = \arg \min \|v - u\|_2^2 + a \sqrt{a^2 + (\nabla u)^2} - a^2. \quad (13)$$

因  $\nabla u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$ , 故可将(13)式改写为:

$$G = (v - u)^2 + a \sqrt{a^2 + u_x^2 + u_y^2} - a^2. \quad (14)$$

下面求方程(14)的极小值, 即目标函数的最优解.

$$\frac{\partial G}{\partial u_x} = \frac{2u_x}{(a^2 + u_x^2 + u_y^2)^{1/2}}, \quad \frac{\partial G}{\partial u_y} = \frac{2u_y}{(a^2 + u_x^2 + u_y^2)^{1/2}},$$

$$\frac{\partial G}{\partial u} = -2(u - v).$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial G}{\partial u_x} \right) = \frac{2u_{xx}}{(a^2 + u_x^2 + u_y^2)^{1/2}} - \frac{2u_x(u_x u_{xx} + u_y u_{xy})}{(a^2 + u_x^2 + u_y^2)^{3/2}}.$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial G}{\partial u_y} \right) = \frac{2u_{yy}}{(a^2 + u_x^2 + u_y^2)^{1/2}} - \frac{2u_y(u_x u_{xy} + u_y u_{yy})}{(a^2 + u_x^2 + u_y^2)^{3/2}}.$$

所以有:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial G}{\partial u_x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial G}{\partial u_y} \right) = a^3 u_{xx} + a u_{xx} u_x^2 + a^3 u_{yy} + a u_{yy} u_y^2 -$$

$$2au_x u_y u_{xy}.$$

可得:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial G}{\partial u_x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial G}{\partial u_y} \right) - \frac{\partial G}{\partial u} = a^3 u_{xx} + au_{xx} u_c^2 + a^3 u_{yy} + au_{yy} u_x^2 - 2au_x u_y u_{xy} + 2(v - u).$$

故令  $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ , 可求出该目标函数的最优解.

### 3 实验结果及分析

为了验证本文提出的  $la$  范数去噪模型的有效性, 现以被噪声污染的 Lena 图像为例进行数值试验. 图像大小均为  $256 \times 256$ , 灰度级为 256, 用峰值信噪比 (PSNR) [5-8] 作为评价的客观标准. 实验中对 TV 范数去噪、小波去噪和  $la$  范数去噪进行了比较. 本实验选用的 Gaussian 噪声有 10、12 和 15 三个方差级别. 原始的 Lena 图片和被噪声污染的 Lena 图片见图 1.



(a) 原始Lena图像 (b) 含噪声的Lena图像

图1 原始 Lena 图像与含噪声的 Lena 图像对比

Fig.1 Comparison of the original Lena image and the Lena image with noise

由于  $la$  范数模型中  $a$  的取值影响着图像去噪效果的好坏. 下面我们将通过 Matlab 数值实验来确定参数  $a$  的最优取值, 如表 1 所示. 并根据表 1 的数据, 我们将不同  $a$  值情况下 PSNR 值的差异绘制成折线图, 如图 2 所示, 可以发现, 当  $a = 0.2$  时, 平均的 PSNR 值最大, 即当  $a = 0.2$  时, 去噪效果最好.

表1 不同  $a$  值下的 PSNR 值

Tab.1 PSNR value with the different parameter  $a$

图片	噪声强度/dB	$a = 0.01$	$a = 0.1$	$a = 0.2$	$a = 0.3$	$a = 0.4$	$a = 0.5$	$a = 1$	$a = 2$
Lena	10	31.75	31.70	31.80	31.83	31.79	31.75	31.76	31.70
	12	31.14	31.11	31.13	31.15	31.13	31.13	31.19	31.17
	15	30.02	30.07	30.04	30.00	30.02	29.97	30.03	30.02

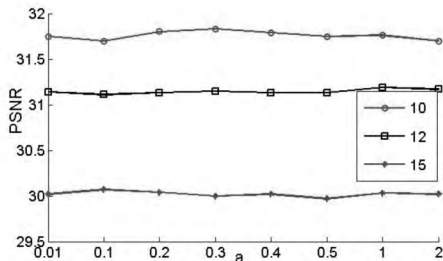


图2 含高斯噪声的 Lena 图像的 PSNR 值与参数  $a$  的关系

Fig.2 The relation between PSNR value and the parameter  $a$  of Lena image with Gaussian noise

图 3 给出了方差为 10、12、15 下降噪处理前后 Lena 图像的视觉效果图. 从图 3 中可以看出, 文中所给方法降噪效果明显, 人眼能直观感受到图像质量的改善, 并且在不同噪声水平下的降噪效果都优于其他两种方法.

表 2 给出了 3 种不同的去噪模型去噪后所得的 PSNR 值, 可以发现, 改进后的  $la$  范数模型较其他两种模型的 PSNR 值有所提高. 新模型的阶梯效应进一步减少, 图像显得更为平滑、自然, 因而人眼视觉效果有很大改善. 虽与 TV 模型相比, 清晰度相差无异, 但是 TV 模型下边缘的模糊程度相对较高.  $la$  范

数模型对边缘的保护使得纹理更加清晰, 在处理图像边缘时可以提供更多的、更精确的细节.



(a) TV模型(方差为10) (b) 小波(方差为10) (c)  $la$ 模型(方差为10)



(d) TV模型(方差为12) (e) 小波(方差为12) (f)  $la$ 模型(方差为12)



(g) TV模型(方差为15) (h) 小波(方差为15) (i)  $la$ 模型(方差为15)

图3 添加方差分别为 10, 12, 15 的高斯噪声后, 各方法去噪后的 Lena 图像

Fig.3 Lena images after denoising the Gaussian noise with the variance 10, 12, 15

## 4 结语

图像去噪算法是图像处理领域的热点问题和关键问题. 本文对图像去噪中的细节保留和边缘保护间寻找平衡的问题进行了探讨, 深入分析了图像过

平滑、边缘模糊的原因, 在 MAP 的框架下, 提出了一种  $l_a$  范数先验模型, 并将该模型与非局部先验模型相结合, 建立了一种既可有效去噪又可保护图像边缘的模型, 使得该模型可以更好地在图像去噪和保留其层次之间找到了一个平衡.

表 2 不同模型去噪后所得的 PSNR 值

Tab.2 PSNR value of the different models after denoising

图片	噪声强度/dB	小波方法	TV 模型	$l_a$ 模型
Lena	10	28.20	30.15	31.83
	12	26.60	29.88	31.19
	15	24.65	29.57	30.07

## 参 考 文 献

- [1] Villena S, Vega M, Molina R, et al. Bayesian super-resolution image reconstruction using an L1 prior [C]// IEEE. Proceedings of 6th International Symposium on Image and Signal Processing and Analysis ( ISPA 2009 ). Granada: ISPA, 2009: 152-157.
- [2] Villena S, Vega M, Babacan S, et al. Bayesian combination of sparse and non-sparse priors in image super resolution [J]. Digital Signal Processing, 2013, 23(2): 530-541.
- [3] Zhao S R, Jin R C, Xu X Y, et al. A variational Bayesian superresolution approach using adaptive image prior model [J]. Mathematical Problems in Engineering, 2015, 2015: 469859.
- [4] Zeng X, Yang L. A robust multiframe super-resolution algorithm based on half-quadratic estimation with modified BTV regularization [J]. Digital Signal Processing, 2013, 23(1): 98-109.
- [5] 陈大力. 图像模糊滤波算法的对比研究与改进 [D]. 沈阳: 东北大学, 2006: 2-12.
- [6] Ashouri Z, Shirani S. Video super resolution using contourlet transform and bilateral total variation filter [J]. IEEE Transactions on Consumer Electronics, 2013, 59(3): 604-609.
- [7] Izadpanahi S, Demirel H. Motion based video super resolution using edge directed interpolation and complex wavelet transform [J]. Signal Processing, 2013, 93(7): 2076-2086.
- [8] Shin D K, Moon Y S. Super-resolution image reconstruction using wavelet based patch and discrete wavelet transform [J]. Journal of Signal Processing Systems, 2014, 81(1): 71-81.