一类带有多重 Hardy 项和多重强耦合 Hardy-Sobolev 临界项的椭圆方程组的正解

康东升,李 静,徐良顺

(中南民族大学 数学与统计学学院,武汉 430074)

摘 要 研究了一类带有多重 Hardy 项和多重强耦合 Hardy-Sobolev 临界项的椭圆方程组,运用集中紧性原理和山路定理,控制 Hardy 项系数和强耦合临界项指数,证明了在一定条件下方程组正解的存在性,首次把带有多重 Hardy 项的临界椭圆方程的相关方法应用到带有多重 Hardy 项和强耦合 Hardy-Sobolev 临界项的椭圆方程组.

关键词 多重 Hardy 项; 强耦合 Hardy-Sobolev 临界项; 集中紧性原理; 山路定理

中图分类号 O175.25 **文献标识码** A **文章编号** 1672-4321(2017)03-0137-05

Positive Solutions to an Elliptic System Involving Multiple Hardy-Type Terms and Multiple Strongly-Coupled Critical Hardy-Sobolev Terms

Kang Dongsheng, Li Jing, Xu Liangshun

(College of Mathematics and Statistics, South-Central University for Nationalities, Wuhan 430074, China)

Abstract In this paper, an elliptic system is investigated, which involves multiple Hardy-type terms and strongly-coupled critical Hardy-Sobolev terms. By the concentration compactness principle and the Mountain Pass Theorem and by controlling the coefficients of Hardy-type terms and the exponents of strongly-coupled critical terms, the existence of positive solutions to the system is verified under certain conditions, and for the first time, the related methods for the critical elliptic equation involving multiple Hardy-type terms are extended to the system of critical elliptic equations involving multiple Hardy-type terms and strongly-coupled Hardy-Sobolev critical terms.

Keywords multiple Hardy-type terms; strongly-coupled critical Hardy-Sobolev term; concentration compactness principle; Mountain Pass theorem

1 相关知识

本文研究如下带有多重 Hardy 项和多重强耦合 Hardy-Sobolev 临界项的椭圆方程组:

$$\begin{cases} -\Delta u - \sum_{i=1}^{k} \dfrac{\lambda_i u}{|x-a_i|^2} = \\ \quad \sum_{i=1}^{k} \dfrac{\alpha_i}{2^*(t_i)} \dfrac{|u|^{\alpha_i-2}|v|^{\beta_i}u}{|x-a_i|^{t_i}}, x \in \Omega, \\ -\Delta v - \sum_{i=1}^{k} \dfrac{\mu_i v}{|x-a_i|^2} = \\ \quad \sum_{i=1}^{k} \dfrac{\beta_i}{2^*(t_i)} \dfrac{|u|^{\alpha_i}|v|^{\beta_i-2}v}{|x-a_i|^{t_i}}, x \in \Omega, \\ u = v = 0, x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^N (N \geqslant 3)$ 是有界光滑区域,方程组中的参数满足如下假设:

(M_1) $a_i \in \Omega, 1 \leqslant i \leqslant k, k \geqslant 2, 0 < t_i < 2, 0 \leqslant \lambda_i, \mu_i \leqslant \bar{\mu} := \left(\dfrac{N-2}{2}\right)^2, \alpha_i, \beta_i > 1, \alpha_i + \beta_i = p_i = 2^*(t_i) := \dfrac{2(N-t_i)}{N-2}$.

方程组(1)与下面的 Hardy-Sobolev 不等式密切相关[1]:

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^{2^*(t)}}{|x-a|^t} dx\right)^{\frac{2}{2^*(t)}} \leqslant C\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx, \forall a \in \mathbb{R}^N, u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N), \tag{2}$$

收稿日期 2017-04-11

作者简介 康东升(1967-),男,教授,博士,研究方向:偏微分方程,E-mail: dongshengkang@scuec.edu.cn

基金项目 国家自然科学基金资助项目(11601530);中南民族大学研究生科研创新项目(2017sycxjj083)

关于对应的最佳常数和极值函数,参见文献[2]和[3]. 当 $t=2$ 时(2)式就变成了著名的 Hardy 不等式[1]:

$$\int_{\mathbb{R}^N}\frac{u^2}{|x-a|}\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{\bar{\mu}}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2\mathrm{d}x, \forall a\in\mathbb{R}^N, u\in C_0^\infty(\mathbb{R}^N). \quad (3)$$

用 $H:=H_0^1(\Omega)$ 表示 $C_0^\infty(\Omega)$ 关于范数 $(\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x)^{1/2}$ 的完备化空间. 由 Hardy 不等式可知,当 $0\leqslant\sum_{i=1}^k\mu_i<\bar{\mu}$ 且 $0\leqslant\sum_{i=1}^k\lambda_i<\bar{\mu}$ 时,积空间 $H\times H$ 有下面的等价范数:

$$\left(\int_\Omega(|\nabla u|^2+|\nabla v|^2-\sum_{i=1}^k\frac{\mu_i u^2+\lambda_i v^2}{|x-a_i|^2})\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}},$$

在积空间 $H\times H$ 中,方程组(1)对应的能量泛函为:

$$J(u,v):=\frac{1}{2}\int_\Omega(|\nabla u|^2+|\nabla v|^2-\sum_{i=1}^k\frac{\mu_i u^2+\lambda_i v^2}{|x-a_i|^2}-\sum_{i=1}^k\frac{1}{p_i}\frac{|u|^{\alpha_i}|v|^{\beta_i}}{|x-a_i|^{t_i}})\mathrm{d}x.$$

则 $J\in C^1(H\times H,\mathbb{R})$. 如果 $(u,v)\neq(0,0)$ 满足 $\langle J'(u,v),(\phi,\psi)\rangle=0, \forall(\phi,\psi)\in H\times H$,即:

$$\int_\Omega(\nabla u\nabla\phi+\nabla v\nabla\psi-\sum_{i=1}^k\frac{\mu_i u\phi+\lambda_i v\psi}{|x-a_i|^2})\mathrm{d}x-\int_\Omega(\sum_{i=1}^k\frac{\alpha_i}{2^*(t_i)}\frac{|u|^{\alpha_i-2}|v|^{\beta_i}u\phi}{|x-a_i|^{t_i}}+\frac{\beta_i}{2^*(t_i)}\frac{|u|^{\alpha_i}|v|^{\beta_i-2}v\psi}{|x-a_i|^{t_i}})\mathrm{d}x=0,$$

则称 $(u,v)\in H\times H$ 是方程组(1)的一个解. 此时由椭圆方程的正则性理论可知:

$$u,v\in C^2(\Omega\backslash\{a_1,a_2,\cdots,a_k\})\cap C^1(\bar{\Omega}\backslash\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}).$$

设 $0\leqslant\mu,\lambda\leqslant\bar{\mu}$, $0<t<2$. $a\in\mathbb{R}^N$, $\alpha,\beta>1$, $\alpha+\beta=2^*(t):=\frac{2(N-s)}{N-2}$,可以定义下面的最佳常数:

$$S_{\mu,t}:=\inf_{u\in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)\backslash\{0\}}\frac{\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^2-\mu\frac{u^2}{|x-a|^2})\mathrm{d}x}{\left(\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u|^{2^*(t)}}{|x-a|^t}\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{2^*(t)}}}, \quad (4)$$

$$\tilde{S}_{\mu,t}:=\inf_{u,v\in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)\backslash\{0\}}\frac{\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^2+|\nabla v|^2-\frac{\mu u^2+\lambda v^2}{|x-a|^2})\mathrm{d}x}{\left(\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u|^\alpha|v|^\beta}{|x-a|^t}\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{2^*(t)}}}, \quad (5)$$

其中 $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ 是 $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ 关于范数 $\left(\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla\cdot|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}$ 的完备化空间. 由文献[3]可知 $S_{\mu,t}$ 与 a 无关,并且 $S_{\mu,t}$ 有如下形式的达到函数:

$$u_{\mu,t,\varepsilon}(x)=\left(\frac{2\varepsilon b(\mu)^2(N-t)}{\sqrt{\bar{\mu}}}\right)^{\frac{\sqrt{\bar{\mu}}}{2-t}}|x-a|^{-(\sqrt{\bar{\mu}}-b(\mu))}\cdot(\varepsilon+|x-a|^{\frac{(2-t)b(\mu)}{\sqrt{\bar{\mu}}}})^{\frac{2-N}{2-t}},$$

其中 $\varepsilon>0$, $b(\mu):=\sqrt{\bar{\mu}-\mu}$.

不失一般性,假设:

(M_2) $\sum_{i=1}^k\lambda_i<\bar{\mu}$, $\sum_{i=1}^k\mu_i<\bar{\mu}$,

(M_3) 存在 l, $1\leqslant l\leqslant k$,使得 $0\leqslant\lambda_l=\mu_l<\mu^*$,并且

$$\frac{2-t_l}{2(N-t_l)}(\tilde{S}_{\mu_l,t_l})^{\frac{N-t_l}{2-t_l}}=\min\left\{\frac{2-t_i}{2(N-t_i)}(\tilde{S}_{\mu_l,t_i})^{\frac{N-t_i}{2-t_i}}, i=1,2,\cdots,k\right\},$$

其中 $\mu^*:=\frac{1}{4}(N^2-4N+4-(\min\{t_i,1\leqslant t\leqslant k, i\neq l\})^2)$.

本文的主要结果可以归纳为下面的定理1.

定理1 假设条件 (M_1), (M_2) 和 (M_3) 成立,则方程组(1)在 $H\times H$ 中至少存在一个正解.

为了证明定理1,需要介绍一些记号. 在本文中 $H\times H$ 中的范数定义为 $\|(u,v)\|^2:=\int_\Omega(|\nabla u|^2+|\nabla v|^2)\mathrm{d}x$, $L^q(\Omega,|x-a_i|^\alpha)$ 表示权重为 $|x-a_i|^\alpha$ 的加权 $L^q(\Omega)$ 空间; C 表示正常数; 当 $t>0$, $\varepsilon\to0^+$ 时, $O(\varepsilon^t)$ 表示满足 $|O(\varepsilon^t)|/\varepsilon^t\leqslant C$ 的变量, $o(\varepsilon^t)$ 表示满足 $|o(\varepsilon^t)|/\varepsilon^t\to0$ 的变量,变量 $O_1(\varepsilon^t)$ 表示存在正常数 $C_1,C_2>0$ 使得 $C_1\varepsilon^t\leqslant O_1(\varepsilon^t)\leqslant C_2\varepsilon^t$,记号 $o(1)$ 表示一个无穷小量. 有时可省略积分式中的 $\mathrm{d}x$.

2 正解的存在性

首先需要建立几个定义和引理.

设泛函 $I \in C^1(H\times H,\mathbb{R})$. 如果对于任意满足下列条件的 $\{(u_n,v_n)\}\subset H\times H$:

$I(u_n,v_n)\to c, I'(u_n,v_n)\to 0$ 　在 $(H\times H)^*$ 中,

$\{(u_n,v_n)\}$ 在 $H\times H$ 中都存在一个强收敛的子列,则称 I 满足 $(P.S.)_c$ 条件.

引理 1　假设条件 (M_1), (M_2) 和 (M_3) 成立, $c^*:=\dfrac{2-t_l}{(N-t_l)}(\tilde S_{\mu_l,t_l})^{\frac{N-t_l}{2-t_l}}$,则对于任意的 $c<c^*$,泛函 J 满足 $(P.S.)_c$ 条件.

证明　当 $n\to\infty$ 时,假设 $\{(u_n,v_n)\}\subset H\times H$ 满足:

$J(u_n,v_n)\to c<c^*$, $J'(u_n,v_n)\to 0$ 　在 $(H\times H)^{-1}$ 中,那么 $\{(u_n,v_n)\}$ 在 $H\times H$ 中是有界的,有:

$$\begin{cases}(u_n,v_n)\xrightarrow{弱}(u,v) \text{ 在 } H\times H \text{ 中},\\ (u_n,v_n)\xrightarrow{弱}(u,v) \text{ 在}(L^2(\Omega,|x-a_i|^{-2}))^2,\\ \quad 1\leqslant i\leqslant k \text{ 中},\\ (u_n,v_n)\xrightarrow{弱}(u,v) \text{ 在}(L^{p_i}(\Omega,|x-a_i|^{-t_i}))^2,\\ \quad 1\leqslant i\leqslant k \text{ 中},\\ (u_n,v_n)\longrightarrow(u,v) \text{ 几乎处处在 } \Omega \text{ 中}.\end{cases}$$

当 $0<t_i<2, 2<p_i<2^*, 1\leqslant i\leqslant k$ 时,由集中紧性原理[4,5]可知,在 $\{(u_n,v_n)\}$ 中存在子序列(仍记为 $\{(u_n,v_n)\}$),非负实数 $\tilde\mu_{a_i},\tilde\gamma_{a_i},\tilde\sigma_{a_i}, 1\leqslant i\leqslant k$,使得下列收敛在测度意义下成立:

$$|\nabla u_n|^2+|\nabla v_n|^2\to d\tilde\mu\geqslant |\nabla u|^2+|\nabla v|^2+\sum_{i=1}^k\tilde\mu_{a_i}\delta_{a_i},$$

$$\frac{\lambda_i u_n^2+\mu_i v_n^2}{|x-a_i|^4}\to d\tilde\gamma=\frac{\lambda_i u^2+\mu_i v^2}{|x-a_i|^4}+\tilde\gamma_{a_i}\delta_{a_i},$$

$$\frac{|u_n|^{\alpha_i}|v_n|^{\beta_i}}{|x-a_i|^{t_i}}\to d\tilde\sigma=\frac{|u|^{\alpha_i}|v|^{\beta_i}}{|x-a_i|^{t_i}}+\tilde\sigma_{a_i}\delta_{a_i},$$

其中 δ_x 是点 x 处的 Dirac 质量. 由 Hardy-Sobolev 不等式,得出:

$$\tilde\mu_{a_i}-\tilde\gamma_{a_i}\geqslant\tilde S_{\mu_i,t_i}(\tilde\sigma_{a_i})^{\frac{2}{p_i}}, 1\leqslant i\leqslant k. \qquad (6)$$

考虑点 $a_i(1\leqslant i\leqslant k)$ 的紧性,任取 $\varepsilon>0$,令 φ_ε^i 是以 a_i 为中心的光滑截断函数,满足 $0\leqslant\varphi_\varepsilon^i\leqslant 1$; 当 $|x-a_i|\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2}$ 时, $\varphi_\varepsilon^i=1$; 当 $|x-a_i|\geqslant\varepsilon$ 时, $\varphi_\varepsilon^i=0$; $|\nabla\varphi_\varepsilon^i|\leqslant\dfrac{4}{\varepsilon}$,则:

$$\lim_{\varepsilon\to0}\lim_{n\to\infty}\int_\Omega(|\nabla u_n|^2+|\nabla v_n|^2)\varphi_\varepsilon^i=\lim_{\varepsilon\to0}\int_\Omega\varphi_\varepsilon^i d\tilde\mu\geqslant\tilde\mu_{a_i},$$

$$\lim_{\varepsilon\to0}\lim_{n\to\infty}\int_\Omega\frac{\lambda_i u_n^2+\mu_i v_n^2}{|x-a_i|^2}\varphi_\varepsilon^i=\lim_{\varepsilon\to0}\int_\Omega\varphi_\varepsilon^i d\tilde\gamma=\tilde\gamma_{a_i},$$

$$\lim_{\varepsilon\to0}\lim_{n\to\infty}\int_\Omega\frac{|u_n|^{\alpha_i}|v_n|^{\beta_i}}{|x-a_i|^{t_i}}\varphi_\varepsilon^i=\lim_{\varepsilon\to0}\int_\Omega\varphi_\varepsilon^i d\tilde\sigma=\tilde\sigma_{a_i},$$

$$\lim_{\varepsilon\to0}\lim_{n\to\infty}\int_\Omega\frac{\lambda_i u_n^2+\mu_i v_n^2}{|x-a_j|^2}\varphi_\varepsilon^i=0, \text{当 } j\neq i \text{ 时},$$

$$\lim_{\varepsilon\to0}\lim_{n\to\infty}\int_\Omega\frac{|u_n|^{\alpha_j}|v_n|^{\beta_j}}{|x-a_j|^{s_j}}\varphi_\varepsilon^i=0, \text{当 } j\neq i \text{ 时},$$

$$\lim_{\varepsilon\to0}\lim_{n\to\infty}\int_\Omega(u_n\nabla u_n+v_n\nabla v_n)\nabla\varphi_\varepsilon^i=0.$$

因此有:

$$0=\lim_{\varepsilon\to0}\lim_{n\to\infty}\langle J'(u_n,v_n),(u_n\varphi_\varepsilon^i,v_n\varphi_\varepsilon^i)\rangle\geqslant \tilde\mu_{a_i}-\tilde\gamma_{a_i}-\tilde\sigma_{a_i}, \qquad (7)$$

于是由(6)、(7)式可得:

$$\tilde S_{\mu_i,t_i}(\tilde\sigma_{a_i})^{\frac{2}{p_i}}\leqslant\tilde\sigma_{a_i}, 1\leqslant i\leqslant k.$$

那么 $\tilde\sigma_{a_i}=0$ 或者 $\tilde\sigma_{a_i}\geqslant(\tilde S_{\mu_i,t_i})^{\frac{N-t_i}{2-t_i}}$.

另一方面,推出:

$$c=J(u_n,v_n)-\frac12\langle J'(u_n,v_n),(u_n,v_n)\rangle+o(1)=$$
$$\sum_{i=1}^k\left(\frac12-\frac1{p_i}\right)\int_\Omega\frac{|u_n|^{\alpha_i}|v_n|^{\beta_i}}{|x-a_i|^{t_i}}+o(1)=$$
$$\sum_{i=1}^k\frac{2-t_i}{2(N-t_i)}\left(\int_\Omega\frac{|u|^{\alpha_i}|v|^{\beta_i}}{|x-a_i|^{t_i}}+\tilde\sigma_{a_i}\right).$$

如果 $\exists i\in\{1,2,\cdots,k\}$ 和 $\tilde\sigma_{a_i}\neq0$,那么可以推出:

$$c\geqslant\frac{2-t_i}{2(N-t_i)}(\tilde S_{\mu_i,t_i})^{\frac{N-t_i}{2-t_i}}\geqslant c^*.$$

这与假设 $c<c^*$ 矛盾. 因此,在 $H\times H$ 中 $(u_n,v_n)\xrightarrow{强}(u,n)$. 证毕.

引理 2　假设 $S_{\mu,t}$ 和 $\tilde S_{\mu,t}$ 分别如(4)式和(5)式, $\alpha+\beta=2^*(t)$,则下面等式成立:

$$\tilde S_{\mu,t}=\left(\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\beta/2^*(t)}+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\beta/2^*(t)}\right)S_{\mu,t}.$$

另外,设 ω 是 $S_{\mu,t}$ 的达到函数,则对于满足 $B/C=\sqrt{\alpha/\beta}$ 的任意正常数 B 和 C, $(u,v)=(B\omega,C\omega)$ 是 $\tilde S_{\mu,t}$ 的达到函数对.

证明　证明过程与文献[6]的定理 5 类似,这

里略去.

任取$\rho>0$使得球$B_{\rho(0)}\subset\Omega$. 令$\omega_{\mu,t,\varepsilon}(x-a)=\varphi(x-a)u_{\mu,t,\varepsilon}(x-a)$是截断函数,其中$\varphi(x)=\varphi(|x|)\in C_0^\infty(B_\rho(0))$,使得$0\leqslant\varphi\leqslant 1$,且在$B_{\rho/2}(0)$内$\varphi\equiv 1$.

引理3[7] 当$\varepsilon\to 0$时,有:

$$\int_\Omega\left(|\nabla\omega_{\mu,t,\varepsilon}(x-a)|^2-\mu\frac{|\omega_{\mu,t,\varepsilon}(x-a)|^2}{|x-a|^2}\right)=(S_{\mu,t})^{\frac{N-t}{2-t}}+O(\varepsilon^{2b(\mu)}),$$

$$\int_\Omega\frac{|\omega_{\mu,t,\varepsilon}(x-a)|^{2^*(t)}}{|x-a|^t}=(S_{\mu,t})^{\frac{N-t}{2-t}}+O(\varepsilon^{2^*(t)b(\mu)}),$$

$$\int_\Omega|\omega_{\mu,t,\varepsilon}(x-a)|^2=\begin{cases}O_1(\varepsilon^2),0\leqslant\mu<\bar{\mu}-1,\\O_1(\varepsilon^2|\ln\varepsilon|),\mu=\bar{\mu}-1,\\O_1(\varepsilon^{2b(\mu)}),\bar{\mu}-1<\mu<\bar{\mu},\end{cases}$$

$$\int_\Omega|\omega_{\mu,t,\varepsilon}(x-a)|^q=\begin{cases}O_1(\varepsilon^{N-q\sqrt{\mu}}),\dfrac{N}{\sqrt{\mu}+b(\mu)}<q<2^*,\\O_1(\varepsilon^{N-q\sqrt{\mu}}|\ln\varepsilon|),q=\dfrac{N}{\sqrt{\mu}+b(\mu)},\\O_1(\varepsilon^{qb(\mu)}),1\leqslant q<\dfrac{N}{\sqrt{\mu}+b(\mu)}.\end{cases}$$

引理4 设:

$(u_\varepsilon,v_\varepsilon):=(\sqrt{\alpha_l/p_l}\,\omega_{\mu_l,t_l,\varepsilon}(x-a_l),\sqrt{\beta_l/p_l}\,\omega_{\mu_l,t_l,\varepsilon}(x-a_l))$,

则在定理1的假设条件下有:

$$\sup_{\tau\geqslant 0}J(\tau u_\varepsilon,\tau v_\varepsilon)<c^*.$$

证明 考虑下面两个函数:

$$\bar{g}(\tau):=\frac{\tau^2}{2}\int_\Omega\left(|\nabla u_\varepsilon|^2+|\nabla v_\varepsilon|^2-\mu_l\frac{(u_\varepsilon)^2+(v_\varepsilon)^2}{|x-a_l|^2}\right)-\frac{\tau^{p_l}}{p_l}\int_\Omega\frac{|u_\varepsilon|^{\alpha_l}|v_\varepsilon|^{\beta_l}}{|x-a_l|^{t_l}}.$$

$$g(\tau):=J(\tau u_\varepsilon,\tau v_\varepsilon)=\bar{g}(\tau)-\frac{\tau^2}{2}\sum_{j\neq i,j=1}^k\mu_j\cdot\int_\Omega\frac{(u_\varepsilon)^2+(v_\varepsilon)^2}{|x-a_j|^2}-\sum_{j\neq i,j=1}^k\frac{\tau^{p_j}}{p_j}\int_\Omega\frac{|u_\varepsilon|^{\alpha_j}|v_\varepsilon|^{\beta_j}}{|x-a_j|^{t_j}}.$$

注意到$\lim\limits_{\tau\to+\infty}g(\tau)=-\infty$且$g(\tau)>0(\tau\to 0)$,因此对于有界$\tau_\varepsilon>0$,$\sup\limits_{\tau\geqslant 0}g(\tau)$能够被取到,由$g'(\tau_\varepsilon)=0$得:

$$\int_\Omega\left(|\nabla u_\varepsilon|^2+|\nabla v_\varepsilon|^2-\mu_l\frac{(u_\varepsilon)^2+(v_\varepsilon)^2}{|x-a_l|^2}\right)=\tau_\varepsilon^{p_l-2}\int_\Omega\frac{|u_\varepsilon|^{\alpha_l}|v_\varepsilon|^{\beta_l}}{|x-a_l|^{t_l}}+\sum_{j\neq i,j=1}^k\mu_j\int_\Omega\frac{(u_\varepsilon)^2+(v_\varepsilon)^2}{|x-a_j|^2}+\sum_{j\neq i,j=1}^k\tau_\varepsilon^{p_j-2}\int_\Omega\frac{|u_\varepsilon|^{\alpha_j}|v_\varepsilon|^{\beta_j}}{|x-a_j|^{t_j}}.$$

当$\varepsilon\to 0$时,由引理3可知,存在不依赖于ε的常数$C_1,C_2>0$,使得:

$$C_1<\tau_\varepsilon<C_2.$$

为了简单,假设:

$$t_{\min}=\min\{t_j:1\leqslant j\leqslant k,j\neq l\}\in(0,4).$$

直接通过计算得:

$$\mu_l<\mu^*\Leftrightarrow 2b(\mu_l)>t_{\min}.\tag{8}$$

另外,

$2^*(t_{\min})=\dfrac{2(N-t_{\min})}{N-2}=\dfrac{N}{\delta+\dfrac{t_{\min}}{2}}>\dfrac{N}{b(\mu_l)}$,当$\mu_l<\mu^*$时,

由(8)式和引理3可得:

$$\int_\Omega|u_\varepsilon|^{2^*(t_{\min})}=O_1(\varepsilon^{t_{\min}}),\text{当}\mu_l<\mu^*\text{时}.$$

另一方面,

$\max\limits_{\tau\geqslant 0}\left(\dfrac{\tau^2}{2}B_1-\dfrac{\tau^{p_l}}{p_l}B_2\right)=\dfrac{2-t_l}{2(N-t_l)}B_1^{\frac{N-t_l}{2-t_l}}B_2^{-\frac{N-2}{2-t_l}}$,$B_1>0$,$B_2>0$.

由引理2和3可以得出:

$$\max_{\tau\geqslant 0}\bar{g}(\tau)=\frac{2-t_l}{2(N-t_l)}\cdot\left(\int_\Omega\left(|\nabla u_\varepsilon|^2+|\nabla v_\varepsilon|^2-\mu_l\frac{(u_\varepsilon)^2+(v_\varepsilon)^2}{|x-a_l|^2}\right)\right)^{\frac{N-t_l}{2-t_l}}\cdot\left(\int_\Omega\frac{|u_\varepsilon|^{\alpha_l}|v_\varepsilon|^{\beta_l}}{|x-a_l|^{t_l}}\right)^{-\frac{N-t_l}{2-t_l}}=\frac{2-t_l}{2(N-t_l)}\left((S_{\mu_l,t_l})^{\frac{N-t_l}{2-t_l}}+O(\varepsilon^{2b(\mu_l)})\right)^{\frac{N-t_l}{2-t_l}}\cdot\left(\left(\frac{\alpha_l}{p_l}\right)^{\frac{\alpha_l}{2}}\left(\frac{\beta_l}{p_l}\right)^{\frac{\beta_l}{2}}(S_{\mu_l,t_l})^{\frac{N-t_l}{2-t_l}}+O(\varepsilon^{p_lb(\mu_l)})\right)^{-\frac{N-t_l}{2-t_l}}=\frac{2-t_l}{2(N-t_l)}(\tilde{S}_{\mu_l,t_l})^{\frac{N-t_l}{2-t_l}}+O(\varepsilon^{2b(\mu_l)}),\tag{9}$$

再由(9)式、引理3可得:

$$g(\tau_\varepsilon)\leqslant\bar{g}(\tau_\varepsilon)-O_1\left(\int_\Omega u_\varepsilon^2\right)-\sum_{j\neq l,j=1}^kO_1\left(\int_\Omega u_\varepsilon^{p_j}\right)\leqslant$$

$$\max_{\tau\geqslant 0}\bar{g}(\tau_\varepsilon)-O_1\left(\int_\Omega u_\varepsilon^2\right)-O_1\left(\int_\Omega u_\varepsilon^{2^*(t_{\min})}\right)\leqslant$$

$$\frac{2-t_l}{2(N-t_l)}(\tilde{S}_{\mu_l,t_l})^{\frac{N-t_l}{2-t_l}}+O(\varepsilon^{2b(\mu_l)})-O(\varepsilon^{t_{\min}})<$$

$$\frac{2-t_l}{2(N-t_l)}(\tilde{S}_{\mu_l,t_l})^{\frac{N-t_l}{2-t_l}}.$$ 证毕.

定理1的证明　设 $c=\inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{\tau\in[0,1]}J(\gamma(\tau))$，其中 $\Gamma=\{\gamma\in C([0,1],H)\mid\gamma(0)=0,J(\gamma(1))<0\}$. 对任意 $u\in H\backslash\{0\}$，由不等式(2)和(3)可得：

$$J(u,v):=\frac{1}{2}\int_\Omega\Big(|\nabla u|^2+|\nabla v|^2-\sum_{i=1}^k\mu_i\frac{u^2+v^2}{|x-a_i|^2}\Big)-\sum_{i=1}^k\frac{1}{p_i}\frac{|u|^{\alpha_i}|v|^{\beta_i}}{|x-a_i|^{t_i}}\geqslant$$

$$\frac{1}{2}\Big(1-\frac{1}{\bar{\mu}}\sum_{i=1}^k\mu_i\Big)\|(u,v)\|^2-\sum_{i=1}^k\frac{1}{p_i}(\tilde{S}_{\mu_i,t_i})\|^{-\frac{p_i}{2}}\|(u,v)\|^{p_i},$$

且存在一个常数 $\bar{\rho}\to 0^+$，使得：

$$b:=\inf_{\|(u,v)\|=\bar{\rho}}J(u,v)>0=J(0,0).$$

由于当 $\tau\to+\infty$ 时，$J(\tau u_\varepsilon,\tau v_\varepsilon)\to-\infty$，所以存在 $\tau_0>0$ 使得 $\|(\tau_0u_\varepsilon,\tau_0v_\varepsilon)\|>\bar{\rho}$ 且 $J(\tau_0u_\varepsilon,\tau_0v_\varepsilon)<0$. 由山路定理[8]可知，存在序列 $\{(u_n,v_n)\}\subset H\times H$，使得当 $n\to\infty$ 时，

$$J(u_n,v_n)\to c,J'(u_n,v_n)\to 0.$$

由引理4可得出：

$$c\leqslant\sup_{\tau\in[0,1]}J(\tau\tau_0u_\varepsilon,\tau\tau_0v_\varepsilon)\leqslant\sup_{\tau\geqslant 0}J(\tau u_\varepsilon,\tau v_\varepsilon)<c^*.$$

由引理1知在 $\{(u_n,v_n)\}$ 中存在子序列(仍记为 $\{(u_n,v_n)\}$)，使得在 $H\times H$ 中 $(u_n,v_n)\to(u,v)$. 因此 J 存在一个临界点 (u,v) 满足方程组(1). 设 $u^+=\max\{u,0\}$，$v^+=\max\{v,0\}$，分别用 u^+,v^+ 来替换方程组(1)中等式右边的 u,v，重复上述过程可以得到方程组(1)的一个非负解 (u,v). 由最大值原理[9]可以推出在 $\Omega\backslash\{0\}$ 中 $u,v>0$. 定理1证毕.

参 考 文 献

[1] Caarelli L, Kohn R, Nirenberg L. First order interpolation inequality with weights [J]. Compositio Mathematica, 1984, 53(1): 259-275.

[2] Catrina F, Wang Z. On the Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities: sharp constants, existence(and nonexistence), and symmetry of extremal functions [J]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 2001, 54(2): 229-257.

[3] Kang D, Peng S. Positive solutions for singular critical elliptic problems [J]. Applied Mathematics Letters, 2004, 17: 411-416.

[4] Lions P L. The concentration compactness principle in the calculus of variations, the limit case(II) [J]. Revista Mathematical Iberoamericana, 1985, 1(2): 45-121.

[5] Lions P L. The concentration compactness principle in the calculus of variations, the limit case(I) [J]. Revista Mathematical Iberoamericana, 1985, 1(1): 145-201.

[6] Alves C, Filho D, Souto M. On systems of elliptic equations involving subcritical or critical Sobolev exponents [J]. Nonlinear Analysis, 2000, 42(5): 771-787.

[7] Kang D, Li G. On the elliptic problems involving multi-singular inverse square potentials and multi-critical Sobolev-Hardy exponents [J]. Nonlinear Analysis, 2007, 66(8): 1806-1816.

[8] Ambrosetti A, Rabinowitz H. Dual variational methods in critical point theory and applications [J]. Journal of Functional Analysis, 1973, 14(4): 349-381.

[9] Vazquez J. A strong maximum principle for some quasilinear elliptic equations [J]. Applied Mathematics and Optimization, 1984, 12(3): 191-202.