

截距同号且存在一个排斥不动点的分段线性映射的动力学分析

顾恩国, 罗阿木*, 卢俊波

(中南民族大学 数学与统计学学院, 武汉 430074)

摘要 为补充和完善前人对分段线性映射动力学行为的研究, 首先, 对参数进行了初步的分类; 然后分别分析每一种情况下系统的动力学行为, 探讨了BCB分叉、flip分叉、接触分叉以及混沌等现象, 并研究了共存吸引子、吸引域的定界和分叉; 最后, 结合数值模拟对理论结果进行了验证.

关键词 分段线性映射; BCB分叉; flip分叉; 接触分叉; 混沌

中图分类号 O193 文献标识码 A 文章编号 1672-4321(2017)04-0131-06

Dynamical Analysis of Piecewise Linear Maps with the Same Intercept Sign and One Repulsive Fixed Point

Gu Enguo, Luo Amu, Lu Junbo

(College of Mathematics and Statistics, South-Central University for Nationalities, Wuhan 430074, China)

Abstract In this paper, the study on the dynamic behavior of piecewise linear map was complemented and perfected. Firstly, a preliminary classification of the parameters is given. Then dynamical behavior of each case was analyzed. BCB bifurcation, flip bifurcation, contact bifurcation and chaos phenomenon, coexistence attractors, basin delimitation and bifurcation of attractors were presented. At last, numerical simulation was used to verify the theoretical results.

Keywords piecewise linear map; BCB bifurcation; flip bifurcation; contact bifurcation; chaos

分段线性映射模型在电子电路模型、非线性振子模型、基因组序列模型等方面有着直接应用, 也在工程和物理学^[1-3]、电子和机械^[4-5]、社会科学、经济学、生物学^[6]等方面有着广泛应用. 所以很多学者开始重视分段线性映射的研究^[1-6].

本文研究的不连续分段线性映射系统为:

$$x_{n+1} = g(x_n) = \begin{cases} g_L(x_n) = a_L x_n + \mu_L, & x < 0, \\ g_R(x_n) = a_R x_n + \mu_R, & x > 0. \end{cases} \quad (1)$$

该映射中含有4个参数 a_L, μ_R, μ_L, μ_R , 原点0是唯一不连续点, 对于有其他不连续点的情况也可通过坐标变换将不连续点变换为原点进行分析. 文献[7]研究了映射在 $0 < a_L < 1, \mu_R < 0, \mu_L, \mu_R > 0$ 条件下的动力学行为, 文献[8]研究了映射在 $a_L > 0, \mu_R > 0, \mu_L > 0, \mu_R < 0$ 条件下的动力学行为, 文献[9]研究了映射在 $a_L a_R < 0, \mu_L \mu_R < 0$ 条件下的动力学行为. 本文基于这三篇文章的分析, 将对该映射在 $a_L \geq 1, \mu_R < 0, \mu_L \mu_R > 0$ 条件下的动力学行为进行研究, 并重点分析

该情况下映射系统产生共存吸引子、混沌的条件以及它们吸引域的定界和分叉.

分叉现象在动力系统的研究中具有重要意义, 它使得系统动力学行为随参数变化. 本文将研究不连续的分段线性映射系统(1)的BCB分叉(由不变集和映射系统定义的边界发生碰撞产生)、flip分叉、接触分叉, 并给出BCB曲线, BCB曲线最先由Leonov于1959年提出, 文献[10]、[11]中也给出了详细的阐述.

在本文中, 首先对所研究分段线性映射的一般性质进行简要分析, 然后分两种情况计算了BCB曲线, 给出了flip分叉、共存吸引子和混沌吸引子的存在条件, 并对有界吸引子进行定界, 最后分析了混沌产生的条件.

1 分段线性映射的一般性质

考虑的分段线性映射族为(1)式4个参数满足约束条件:

收稿日期 2017-04-06 * 通讯作者 罗阿木 研究方向: 非线性动力学应用 E-mail: 1194846493@qq.com

作者简介 顾恩国(1964-) 男 教授 研究方向: 非线性动力学应用 E-mail: guenguo@163.com

基金项目 国家自然科学基金资助项目(61374085)

$$a_L \geq 1, \mu_R < 0, \mu_L \mu_R > 0. \quad (2)$$

该线性映射 $g(x)$ 满足镜面对称性:

$$g(x, \mu_L, \mu_R, \mu_L, \mu_R) = -g(-x, \mu_L, \mu_R, -\mu_L, -\mu_R).$$

本文仅讨论左边不动点为排斥的且截距为正即 $\mu_{L,R} > 0$ 的情况, 右边不动点为排斥的且截距为负的情况可由对称性得到.

若 $a_L > 1, \mu_R < 0, \mu_{L,R} > 0$, 那么该线性映射具有两个不动点在 Y 轴的两侧分别为:

$$x_L^* = \frac{\mu_L}{1 - a_L} < 0, \quad x_R^* = \frac{\mu_R}{1 - a_R} > 0.$$

显然 x_L^* 不稳定, x_R^* 的稳定性由 a_R 与 -1 的大小决定, 当 $a_R < -1$ 时 x_R^* 不稳定, 当 $-1 < a_R < 0$ 时 x_R^* 稳定. 在 x_R^* 附近有界吸引子的吸引域可以用排斥不动

点 x_L^* 及其一阶前像界定即为: (x_L^*, x_{L-1}^*) , 这里 x_{L-1}^* 为 x_L^* 在右侧的一阶前像:

$$x_{L-1}^* = \frac{\mu_L - \mu_R + a_L \mu_R}{a_R(1 - a_L)}.$$

从图 1(a)、(b) 可以看出关于 x_R^*, μ_L, μ_R 的大小关系, 该映射有 3 种不同的情况: (1) 左边一支的截距在右边一支的上面, 即: $x_R^* < \mu_R < \mu_L$, 如图 1(a); (2) 左边一支的截距在右边一支的下面, 且在不动点 x_R^* 的上面, 即: $x_R^* < \mu_L < \mu_R$; (3) 左边一支的截距在右边一支的下面, 且在不动点 x_R^* 的下面, 即: $\mu_L < x_R^* < \mu_R$, 如图 1(b), 当 $\mu_L = \mu_R$ 时该映射化为分段光滑的帐篷映射^[12].

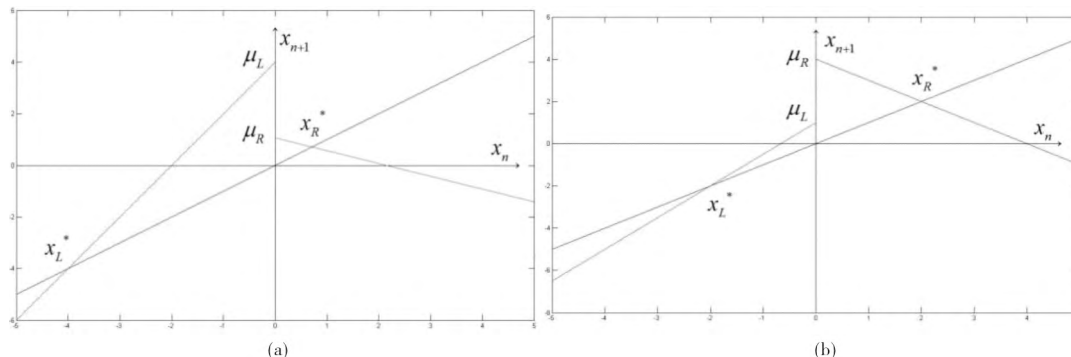


图1 分段线性映射图

Fig. 1 Diagram of piecewise linear map

由于 x_L^* 的排斥作用, 当 $\mu_L > \mu_R, x_{L-1}^* > \mu_L$ 时, 区间 $M = (a_R \mu_L + \mu_R, \mu_L)$ 为吸收区间; 当 $\mu_L < \mu_R, x_{L-1}^* > \mu_R$ 时, 区间 $N = (\mu_R(a_R + 1), \mu_R)$ 为吸收区间. 以下在约束条件(2)下, 分别对以上 3 种情况进行分析, 首先讨论当 $a_L = 1, \mu_R = -1$ 时映射系统的动力学行为.

2 分段线性映射的动力学行为

2.1 $a_L = 1, \mu_R = -1$ 条件下的动力学行为

当 $a_L = 1, \mu_R = -1$ 时, 映射变为:

$$x_{n+1} = g(x_n) = \begin{cases} g_L(x_n) = x_n + \mu_L, & x < 0, \\ g_R(x_n) = -x_n + \mu_L, & x > 0. \end{cases}$$

命题 1 假设 $a_L = 1, \mu_R = -1$ 则映射满足:

(a) 若 $\mu_L < \mu_R$, 吸收区间 $I = [0, \mu_R]$ 中除中点外任意点均为二周期点, I 的吸引域为 $(-\infty, +\infty)$;

(b) 若 $\mu_L > \mu_R$, 吸收区间 $D = [-\mu_L + \mu_R, \mu_L]$ 中有两类吸引子, 在 I 中除中点外任意点均为二周期点, 在 $D \setminus I = [-\mu_L + \mu_R, 0) \cup (\mu_R, \mu_L]$ 中除 $[-\mu_L + \mu_R, 0)$ 及 $(\mu_R, \mu_L]$ 的中点外任意点均为四周期点, D 的吸引域为 $(-\infty, +\infty)$.

证明 映射系统仅有的不动点为: $x_R^* = \frac{\mu_R}{2}$, 从

初始点 $x_0 \in I$ 出发的轨线恒为二周期轨. 若 $\mu_L < \mu_R$, 任意点经过有限次迭代最终都将进入 I 形成二周期轨, 此时区间 I 为吸收区间, 其吸引域为: $(-\infty, +\infty)$, 其中任意点均为二周期点(包含假的二周期点 x_R^*). 若 $\mu_L > \mu_R$, 从任意点出发的轨线都进入吸收区间 D 中, 因此 D 的吸引域为 $(-\infty, +\infty)$. 区间 I 中任意一点均为二周期点, 因为轨线进入区间 I 便形成二周期轨. 下面说明当轨线进入 $D \setminus I$ 必然稳定到四周期轨.

不妨令 $\forall x_0 \in [-\mu_L + \mu_R, 0]$ 由:

$$x_1 = g_L(x_0) = x_0 + \mu_L,$$

$$x_2 = g_R \circ g_L(x_0) = -x_0 - \mu_L + \mu_R,$$

$$x_3 = g_L \circ g_R \circ g_L(x_0) = -x_0 - \mu_L + \mu_R + \mu_L = -x_0 + \mu_R,$$

$$x_4 = g_R \circ g_L \circ g_R \circ g_L(x_0) = x_0 - \mu_R + \mu_R = x_0,$$

可知从 x_0 出发的轨线经过四次迭代回到初始点, 所以从 $D \setminus I$ 中出发的轨线均形成四周期轨, 因此其中任意点均为四周期点. 此时若 $x_1 = x_3$, 那么 $x_0 = x_2 =$

$\frac{-\mu_L + \mu_R}{2} x_1 = x_3 = \frac{\mu_L + \mu_R}{2}$, 此时四周期轨实际为二周期轨: $O(\frac{-\mu_L + \mu_R}{2}, \frac{\mu_L + \mu_R}{2})$, 即假四周期轨, 其中 $\frac{-\mu_L + \mu_R}{2}$ 恰好为 $[-\mu_L, \mu_R]$ 的中点, $\frac{\mu_L + \mu_R}{2}$ 恰好为 $(\mu_R, \mu_L]$ 的中点, 故而命题成立.

图 2 (a) 给出了假四周期轨即二周期轨的情况, 如图 2 (b) 给出了任意一种四周期轨的情况. 取参数 $0 < \mu_L, \mu_R < 4$ 作出二维分叉图, 如图 3, 次对角线下方即 $\mu_L < \mu_R$ 时只有二周期轨, 与上述分析一致. 在次对

角线上方即 $\mu_L > \mu_R$ 时, 从图中可以看出, 映射系统仅有二、四周期的周期轨. 根据以上分析可知, 所取的初始点 $x_0 = -2$ 可能在吸收区间 D 之外, 所以当 $-\mu_L + \mu_R < -2 + k\mu_L < 0, k \in N^*$ 时有四周期轨存在. 因此二周期轨向四周期轨过渡的 BCB 曲线为: $-\mu_L + \mu_R = -2 + k\mu_L$, 四周期轨向二周期轨过渡的 BCB 曲线为: $-2 + k\mu_L = 0$, 由该解析式可知 BCB 曲线是水平的较为简单, 故而在图中不作注明. 取 $k = 1, 2, 3, 4$ 作出部分 BCB 曲线如图 4, 再与图 3 对比可知刚好是灰色和浅灰色两种不同颜色区域的边界.

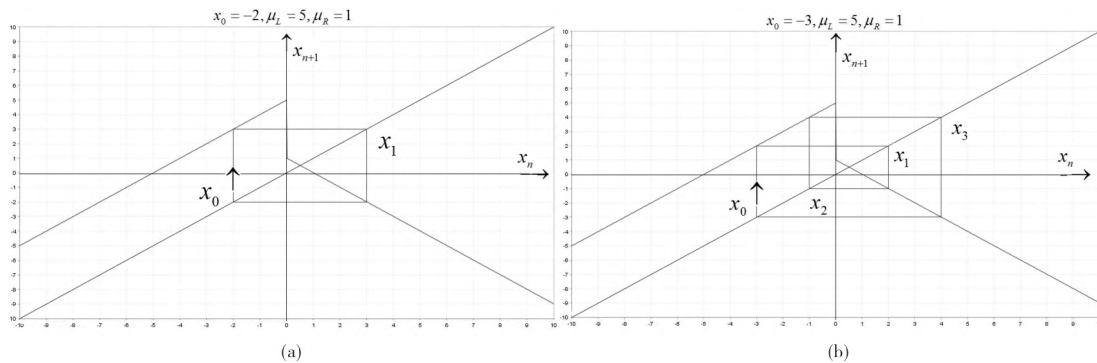


图 2 二周期和四周期轨线图

Fig. 2 Diagram of two cycle and four cycle trajectory

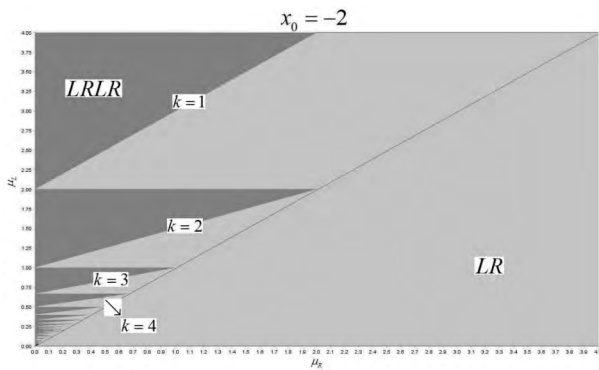


图 3 二维分叉图

Fig. 3 Diagram of two-dimensional bifurcation

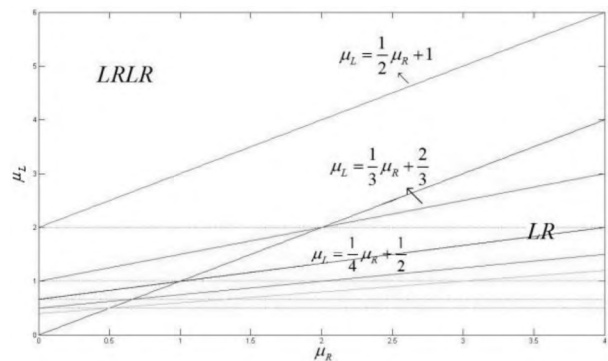


图 4 BCB 曲线

Fig. 4 BCB curve

2.2 $a_L > 1, \mu_R < 0$ 条件下的动力学行为

2.2.1 $a_L > 1, -1 < a_R < 0$ 条件下的动力学行为

当 $-1 < a_R < 0, \mu_L > \mu_R$ 时, 若 $x_{L-1}^* > \mu_L$, 吸收区间 M 的吸引域为: $\chi(M) = (x_L^*, x_{L-1}^*)$, 无穷吸引子的吸引域为: $(-\infty, x_L^*) \cup (x_{L-1}^*, +\infty)$. 区间 M 中除了已有的吸引不动点 x_R^* 外可能还存在其他有界吸引子, 如图 5 简单数值模拟的一维分叉图^[13] 可以看出存在与 x_R^* 共存的二周期轨和四周期轨. 由图 5 初步可知, 当 $-2/3 < a_R \leq -0.4716$ 存在二周期轨, 在该参数取值范围条件下, 该二周期轨的特征值为: $\lambda_{LR} = |a_L a_R| < 1$, 所以该二周期轨稳定. 当 $a_R = -2/3$

时, 存在四周期轨.

为了进一步分析该情况下与吸引子 x_R^* 共存的周期轨的情况, 作出二维分叉图, 如图 6, 可知存在二、四周期轨与吸引子 x_R^* 共存. 显然, 要在区间 M 中有吸引的二周期轨, 对于 $a_L > 1, -1 < a_R < 0$ 的情况, 首先二周期轨必须稳定, 即 $|a_L a_R| < 1$, 因此 $a_R > -\frac{1}{a_L}$; 其次 $\mu_R \mu_L + \mu_R < 0$ 必须成立, 即 $a_R < -\frac{\mu_R}{\mu_L}$ 才能保证从左边迭代的点有到达右边并再次返回左边的可能. 最后, 若从 $x \in (x_L^*, x_{L-1}^*)$ 出发的轨线最终要收敛到二周期轨, 那么它一定不属于吸引不动点 x_R^* 的全部吸

引域,即 $x \notin \bigcup_{k=0}^{\infty} g^{-k}(I_0)$ (下面会详细分析 x_R^* 的吸引域) 故而要在 M 中形成稳定的二周期轨的必要条件为:

$$a_R > -\frac{1}{a_L} \quad a_R < -\frac{\mu_R}{\mu_L} \quad x \notin \bigcup_{k=0}^{\infty} g^{-k}(I_0).$$

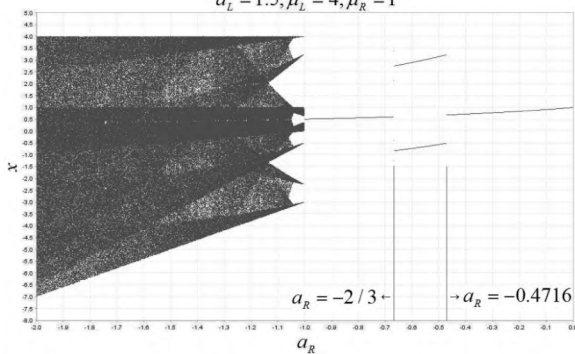


图5 一维分叉图

Fig.5 Diagram of one-dimensional bifurcation

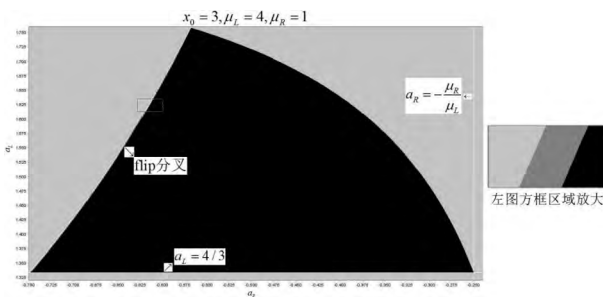


图6 二维分叉图

Fig.6 Diagram of two-dimensional bifurcation

图6 二维分叉图给出了形成稳定二周期轨的边界条件,对于该吸引的二周期轨,记作: $O(2) = \{x_0, x_1\}$, $\mu_R \mu_L + \mu_R < x_0 < 0 < x_1 < \mu_L$, 由 $g_L(x_0) = x_1$, $g_R(x_1) = x_0$ 容易计算出:

$$x_0 = \frac{a_R \mu_L + \mu_R}{1 - a_L a_R} \quad x_1 = \frac{a_L \mu_R + \mu_L}{1 - a_L a_R}.$$

要对该吸引二周期轨的吸引域定义,对其共存吸引子 x_R^* 的吸引域定义如图7 x_R^* 的直接吸引域: I_0 I_0 及其 I_0 的所有前像的并集构成 x_R^* 的全部吸引域,计算其一、二阶前像 I_0 的一阶前像: $I_1 = g^{-1}(I_0)$ I_0 的二阶前像: $I_2 = g^{-2}(I_0)$, 计算可得:

$$I_0 = (0, -\frac{\mu_R}{a_R}) \quad I_1 = (-\frac{\mu_L}{a_L}, \frac{-\mu_R - a_R \mu_L}{a_L a_R}),$$

$$I_{2L} = (-\frac{\mu_L - a_L \mu_L}{a_L^2}, \frac{-\mu_R - a_R \mu_L - a_L a_R \mu_L}{a_L^2 a_R}),$$

$$I_{2R} = (\frac{-\mu_R - a_R \mu_L - a_L a_R \mu_R}{a_L a_R^2}, \frac{-\mu_L - a_L \mu_R}{a_L a_R}).$$

所以 x_R^* 的全部吸引域为 $B(x_R^*) = \bigcup_{k=0}^{\infty} g^{-k}(I)$, 从而其

共存吸引子二周期轨的吸引域为:

$$\chi\{O(2)\} = (x_{L-1}^*, x_L^*) \setminus B(x_R^*).$$

$$a_L = 1.5, a_R = -0.6, \mu_L = 4, \mu_R = 1$$

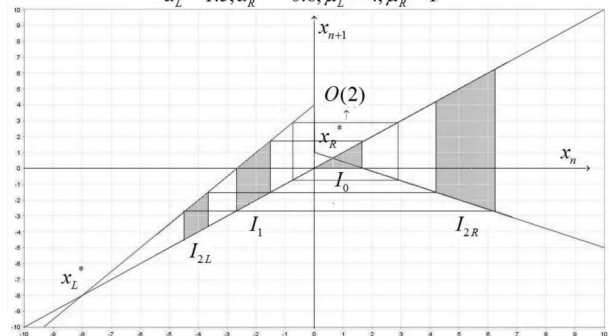


图7 共存吸引子吸引域

Fig.7 Basin of attraction for coexistence attractors

由图6可知,黑色区域向灰色区域过渡的曲线即为 flip 分叉(倍周期分叉),其解析式为: $a_L^2 a_R^2 = 1$. 当 a_L, a_R 取值在灰色区域时稳定到四周期轨,四周期轨的形式只能为 $LRLR$ 或 L^3R , 但根据所取参数的范围和初值的特性,可知只存在形如 $LRLR$ 形式的四周期轨,其特征值为: $\lambda_{LRLR} = |a_L^2 a_R^2| < 1$, 记作: $O(4) = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$, $\mu_R \mu_L + \mu_R < x_0 < x_2 < 0 < x_1 < x_3 < \mu_L$, 所以与吸引子 x_R^* 共存吸引子四周期轨的吸引域仍然为: $\chi\{O(4)\} = (x_{L-1}^*, x_L^*) \setminus B(x_R^*)$.

以下通过数值模拟对以上分析进行验证,取 $a_R = -0.6$, 可计算出一个稳定二周期轨为: $O(2) = \{-0.74413866, 2.8848114\}$, 恰为图7中闭合的矩形.

对应吸引子 x_R^* 的部分吸引域为:

$$I_0 = (0, 5/8) \quad I_1 = (-8/3, -9/4),$$

$$I_{2L} = (-40/9, -25/8) \quad I_{2R} = (65/12, 55/9).$$

又由图5可知,当 $a_R = -2/3$ 时,系统在区间 M 中具有稳定的四周期轨与不动点 x_R^* 共存,经计算可得该四周期轨为:

$$O\{4\} = \{-1.2538227, 2.1100917, -0.41794088, 3.374108\}.$$

若 $x_{L-1}^* = \mu_L$, 吸引区间与有界吸引子的边界接触而发生接触分叉.

接触分叉后,即 $x_{L-1}^* < \mu_L$ 时,区间 M 不再是吸引区间,属于无穷吸引子吸引域的一部分 P_0 的前像在 (x_L^*, x_{L-1}^*) 中做窝,使得有界吸引子的吸引域变得不连通,如图8无穷吸引子在 (x_L^*, x_{L-1}^*) 中做的第一个窝为 P_0 的一阶前像: $P_1 = g^{-1}(P_0)$, P_0 的二阶前像为: $P_{2L}, P_{2R} = g^{-2}(P_0)$, P_0 的三阶前像为: $P_{3LL}, P_{3RL}, P_{3LR} = g^{-3}(P_0)$, 直至 P_0 的无穷阶前像均可计算,显然有界吸引子的吸引域在接触分叉后是不连通的,又通过二维分叉图(图9)可判断在该情况下,系统要么

收敛到有界吸引子 x_R^* 要么发散到无穷吸引子,所以有界吸引子 x_R^* 的吸引域为:

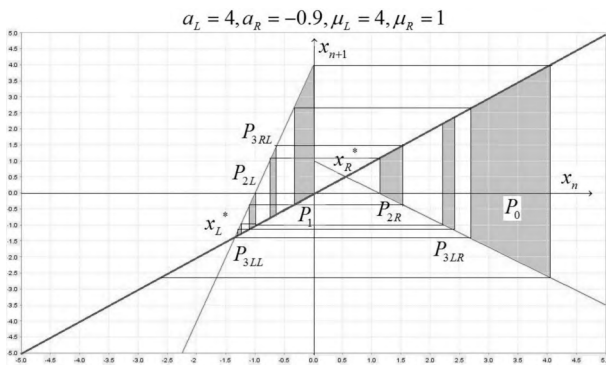


图 8 无穷吸引子吸引域图

Fig. 8 Diagram for basin of infinite attractor

当 $-1 < a_R < 0$ $\mu_L = \mu_R$ 时,为 $\mu_L < \mu_R$ 和 $\mu_L > \mu_R$ 情况的临界过渡,映射化为分段光滑的帐篷映射,可参考文献 [12].

当 $-1 < a_R < 0$ $\mu_L < \mu_R$ 时 x_L^* 是排斥子 x_R^* 是吸引子,此时系统所有有界轨线均收敛到不动点 x_R^* ,所以有界吸引子(不动点 x_R^*)及无穷吸引子吸引域分别为:

$$\chi(x_R^*) = (x_L^*, x_{L-1}^*),$$

$$\chi(\infty) = (-\infty, x_L^*) \cup (x_{L-1}^*, +\infty).$$

综上所述,我们得到如下命题 2.

命题 2 假设 $a_L > 1$, $-1 < a_R < 0$ 则映射满足:

- (a) 当 $\mu_L > \mu_R$ 时,若 $x_{L-1}^* > \mu_L$, 吸收区间 M 中不动点 x_R^* 与其他有界吸引子共存;若 $x_{L-1}^* = \mu_L$, 发生接触分叉;若 $x_{L-1}^* < \mu_L$, 有界吸引子吸引域变得不连通;
- (b) 当 $\mu_L = \mu_R$ 时,映射化为分段光滑的帐篷映射;
- (c) 当 $\mu_L < \mu_R$ $x_{L-1}^* > \mu_R$ 时,若 $\mu_L > x_R^*$, 吸收区间 N 中存在唯一有界吸引子 x_R^* , 吸引域为 (x_L^*, x_{L-1}^*) ,

$$\Phi(x_R^*) = (x_L^*, x_{L-1}^*) \setminus \left\{ \bigcup_{k=0}^{\infty} g^{-k}(P_0) \right\}.$$

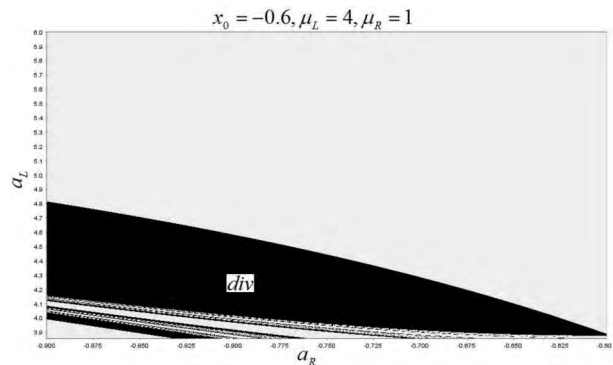


图 9 二维分叉图

Fig. 9 Diagram of two-dimensional bifurcation

无穷吸引子的吸引域为: $(-\infty, x_L^*) \cup (x_{L-1}^*, +\infty)$.

2. 2. 2 $a_L > 1$ $\mu_R < -1$ 条件下的动力学行为

当 $a_L > 1$ $\mu_R < -1$ 时 x_L^* x_R^* 均为不稳定排斥不动点.当轨线位于 $(x_L^*, 0)$ 时,由于 x_L^* 的作用被排斥到右边,同样当轨线位于右边时,由于 x_R^* 的作用轨线又被排斥到左边,因此系统可能产生有界轨线.但是由于 $|a_{L,R}| > 1$, 所以任意周期轨线均不稳定,因此有界吸引子必然是混沌吸引子或准周期吸引子.

当 $\mu_L > \mu_R$ 若 $x_{L-1}^* > \mu_L$, M 中必然存在有界吸引子,如图 10(a) 给出了点 x_1 与不动点 x_R^* 同宿的同宿轨,因此有界吸引子必然是混沌吸引子,所以无穷吸引子吸引域为: $\chi_1(\infty) = R \setminus (x_L^*, x_{L-1}^*)$. 当 $x_{L-1}^* = \mu_L$ 吸收区间与有界吸引子的吸引域发生接触,分叉后即: $x_{L-1}^* < \mu_L$, M 不再是吸收区间,无穷吸引子吸引域的一部分的前像在 (x_L^*, x_{L-1}^*) 中做窝,使得有界吸引子的吸引域成为分形结构,记有界吸引子的吸引域为: H_0 , 因此初值取在 H_0 中时系统发生混沌.故而无穷吸引子的吸引域为:

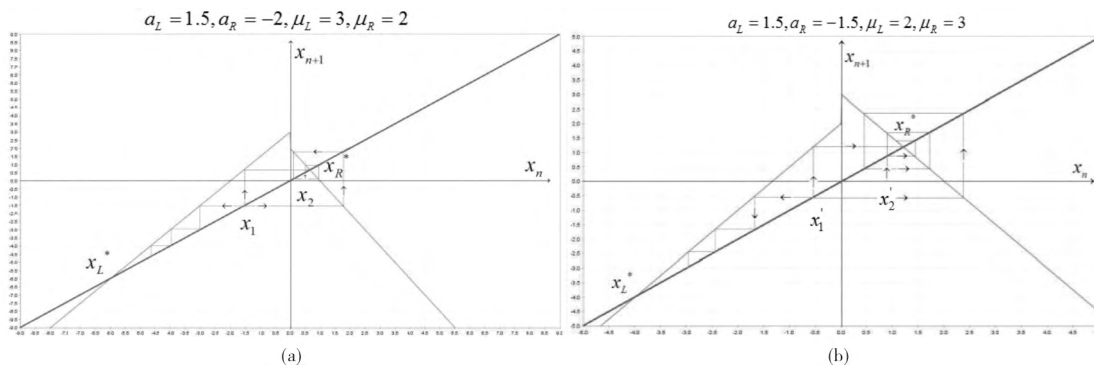


图 10 同宿轨线图

Fig. 10 Diagram of homoclinic trajectory

$$B(\infty) = (-\infty, x_{L-1}^*) \cup (x_{L-1}^*, +\infty) \cup \{(x_L^*, x_{L-1}^*) \setminus H_0\}.$$

当 $\mu_L = \mu_R$ 时, 为 $\mu_L < \mu_R$ 和 $\mu_L > \mu_R$ 情况的临界过渡, 此时映射化为分段光滑的帐篷映射.

当 $\mu_L < \mu_R$, $x_{L-1}^* > \mu_R$ 时, N 中必然存在有界吸引子. 若 $\mu_L > x_R^*$, 如图 10(b) 给出了点 x_{L-1}^* 与不动点 x_R^* 同宿的同宿轨, 因此有界吸引子必然是混沌吸引子, 所以无穷吸引子吸引域为: $\chi_2(\infty) = R \setminus (x_L^*, x_{L-1}^*)$; 若 $\mu_L < x_R^*$, 虽然我们不能找到同宿轨, 但是 $|a_{L,R}| > 1$, 所有周期轨线均不稳定, 所以有界吸引子不可能是周期吸引子, 必然是混沌吸引子或准周期吸引子; 若 $x_{L-1}^* = \mu_R$, 吸收区间与有界吸引子的吸引域发生接触, 分叉后即 $x_{L-1}^* < \mu_R$ 后, N 不再是吸收区间, 因为无穷吸引子吸引域的一部分的前像在 (x_L^*, x_{L-1}^*) 中做窝, 使得有界吸引子的吸引域不连通成为分形结构. 综上所述, 我们得到如下命题 3.

命题 3 假设 $a_L > 1$, $\mu_R < -1$, 则映射系统不可能存在周期吸引子.

(a) 当 $\mu_L > \mu_R$ 时, 若 $x_{L-1}^* > \mu_L$, 吸收区间 M 中的有界吸引子为混沌吸引子, 吸引域为: (x_L^*, x_{L-1}^*) ; 若 $x_{L-1}^* = \mu_L$, 发生接触分叉; 若 $x_{L-1}^* < \mu_L$, 有界吸引子吸引域变得不连通;

(b) 当 $\mu_L = \mu_R$ 时, 映射化为分段光滑的帐篷映射;

(c) 当 $\mu_L < \mu_R$, $x_{L-1}^* > \mu_R$ 时, 若 $\mu_L > x_R^*$, 吸收区间 N 中有界吸引子必然是混沌吸引子; 若 $\mu_L < x_R^*$, 有界吸引子是混沌吸引子或准周期吸引子, 吸引域为: (x_L^*, x_{L-1}^*) ; 当 $x_{L-1}^* = \mu_R$ 时, 发生接触分叉; 当 $x_{L-1}^* < \mu_R$ 时, 有界吸引子吸引域变得不连通.

3 小结

本文对有一个不连续点的分段线性映射系统

(1) 在 $a_L \geq 1$, $\mu_R < 0$, $\mu_L \mu_R > 0$ 条件下的动力学行为进行了分析. 当 $a_L = 1$, $\mu_R = -1$ 时, 系统只存在二、四周期的周期轨, 求出了从二周期向四周期过渡, 四周期向二周期过渡的 BCB 曲线; 当 $a_L > 1$, $-1 < a_R < 0$ 时, 对映射系统的共存吸引子、flip 分叉曲线存在的必要条件进行了分析, 对有界吸引子和无界吸引子的吸引域进行定界并且讨论了吸引域的接触分叉问题; 当 $a_L > 1$, $\mu_R < -1$ 时, 映射系统必然存在混沌吸引子或准周期吸引子; 另外, 分析了同宿轨的存在条件, 说明了混沌现象的存在. 通过对该映射系统动力学行为

的研究, 对该类系统的动力学行为有了全局的把握, 为该系统的实际应用提供了可靠的理论依据.

参 考 文 献

- [1] Banerjee S, Karthik M S, Yuan G H, et al. Bifurcations in one-dimensional piecewise smooth maps theory and applications in switching circuits [J]. IEEE T Circuits-I, 2000, 47(3): 389-394.
- [2] Banerjee S, Verghese G C. Nonlinear phenomena in power electronics: attractors, bifurcations, chaos and nonlinear control [M]. New York: IEEE Press, 2001: 34-82.
- [3] Dankowicz H, Nordmark A B. On the origin and bifurcations of stick-skip oscillations [J]. Physical Review D, 2000, 136: 208-302.
- [4] Puu T, Sushko I. Oligopoly dynamics, models and tools [M]. New York: Springer-Verlag, 2002: 86-122.
- [5] Puu T, Sushko I. Business cycle dynamics, models and tools [M]. New York: Springer-Verlag, 2006: 117-136.
- [6] Coutinho R, Frenandez B, Lima R, et al. Discrete time piecewise affine models of genetic regulatory networks [J]. Mathematical Biology, 2006, 52: 524-570.
- [7] Gardini L, Tramontana F. Border collision bifurcation curves and their classification in a family of 1D discontinuous maps [J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2011, 44(4): 248-259.
- [8] Gardini L, Tramontana F. Border-collision bifurcations in 1D piecewise-linear maps and Leonov's approach [J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2010, 20(10): 3085-3104.
- [9] Gardini L, Tramontana F. Border collision bifurcations in 1D PWL map with one discontinuity use of the first return map [J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2010, 20(11): 3259-3574.
- [10] Nusse H E, Yorke J A. Border-collision bifurcation for piece-wise smooth one-dimensional maps [J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 1995, 5: 189-207.
- [11] Nusse H E, Ott E, Yorke J A. Border-collision bifurcations: an explanation for observed bifurcation phenomena [J]. Physical Review E, 1994, 49(107): 3-6.
- [12] 顾恩国. 离散动力系统的分叉和混沌 [M]. 北京: 科学出版社, 2013: 17-49.
- [13] 顾恩国, 鲁嘉璐. 环境污染与自然资源耦合系统的动力学模型分析 [J]. 中南民族大学学报(自然科学版), 2017, 36(3): 142-146.