二维图像强度-几何相关系数的统计研究方法

段 汕,张 晔,张彬彬
(中南民族大学 数学与统计学学院,武汉 430074)

摘 要 将 Vizilter 的图像强度-几何相关系数的研究方法加以推广,对随机马赛克图像,采用均方范数作为量化方法,研究了基于投影算子的中心化形态相关系数和几何相关系数更一般的形式,并以 Vizilter 的各种相关系数作为其特例,研究结果更符合图像的自然构成.此外,通过引入序化函数,研究了相关系数的一些新形式,使得图像相似度比较指标更加丰富.

关键词 强度-几何相关系数;均方范数;随机向量
中图分类号 O143 **文献标识码** A **文章编号** 1672-4321(2018)01-0144-05

Statistical Method of Intensity-Geometrical Correlation Coefficient for 2D Images

Duan Shan, Zhang Ye, Zhang Binbin
(College of Mathematics and Statistics, South-Central University for Nationalities, Wuhan 430074, China)

Abstract In this paper, the research method of Vizilter's image intensity-geometric correlation coefficient is generalized. The mean square norm is used as a quantitative method for random mosaic images. The central morphologic correlation coefficient and the geometric correlation coefficient based on the projection operator are researched more generally. And the various correlation coefficients of Vizilter will be used as a special case. The result of the research is more consistent with the natural composition of the image. In addition, by introducing the ordering function, some new forms of the correlation coefficient are researched, which makes the image similarity comparison coefficient index more abundant.

Keywords intensity-geometrical correlation coefficient; mean square norm; random vector

在 Pyt´ev 的形态学[1]框架下,二维图像采用的是一种强度-几何模型[1,2],图像表现为空间域划分下的分片常函数形式. 空间域的划分提供了图像确定的几何形状信息,不同图像几何形状的比较则是通过各类相关系数的建立刻画形状的相似程度. 在基于投影算子的比较方法[3-6]中,图像表示是其重要的组成部分,其中图像几何形状的分布是确定的,所对应的强度向量反映不同季节、时间、气候、光照条件、光谱范围下所获取的同一场景的不同图像. 在此意义下,多种形式的相关系数被研究. Vizilter 在其研究工作[3]中,将图像的强度向量视为 n 维随机向量,在独立同分布、零均值的条件下,研究了一类"强度-几何"相关系数,其结果是对 Pyt´ev[1]的"几何"相关系数研究成果的推广.

将图像的强度向量视为随机向量,使得对相似性度量的量化方法需要有相应的调整. 一个最直接的选择是将随机向量的统计量引入相关系数的表示中,Vizilter 在文献[3]中便是选用的这种处理方法. 在实际问题中,图像强度随机向量的独立同分布是一种相对理想的假设,大多数情况下则表现为相关性的分布取值. 因此,本文在减少对强度随机向量各种限制的情况下,将文献[3]中的方法进行了推广,所建立的图像几何形状相关系数将文[3]中的诸多系数作为其特例,其研究结果更符合图像的自然构成. 此外,文中还提出并研究了一系列新的相关系数形式,使得图像几何形状的比较工具更为

收稿日期 2017-12-19
作者简介 段 汕(1962-),女,教授,博士,研究方向:数学应用方法与图像处理,E-mail:duanshan@mail.scuec.edu.cn
基金项目 国家自然科学基金资助项目(61374085;61771021)

丰富.

1　预备知识

在 Pyt´ev 的图像表示方法下,二维图像表现为有界闭区域 $\Omega(\subset R^2)$ 上的二元分片常函数 $f(x,y):\Omega\to R$,其形状[5] 定义为 $F=\{f(x,y)=\sum_{k=1}^{n}f_k\chi_{F_k}(x,y)\mid\bigcup_{k=1}^{n}F_k=\Omega,F_j\cap F_k=\varnothing,j\neq k\}$,其中 $\chi_{F_k}(x,y)$ 是 F_k 的特征函数:

$$\chi_{F_k}(x,y)=\begin{cases}1,(x,y)\in F_k\\0,(x,y)\notin F_k\end{cases},k=1,2,\cdots,n.$$

$F=\{F_1,F_2,\cdots,F_n\}$ 是对图像 $f(x,y)$ 空间域 Ω 的划分,$f=(f_1,f_2,\cdots,f_n)^{\mathrm{T}}\in R^n$ 是 $f(x,y)$ 的强度向量.图像 f 作为 Hilbert 空间 $L^2(\Omega)$ 中的元素,其范数 $\|f\|^2=(f,f)$,图像间的 Euclidean 距离 $d_E(g,f)=\|g-f\|$,且 $F\subseteq L^2(\Omega)$ 是 $L^2(\Omega)$ 的凸闭子空间.

对于给定的形状 $G=\{G_1,G_2,\cdots,G_m\}:\bigcup_{k=1}^{m}G_k=\Omega,G_j\cap G_k=\varnothing,j\neq k$ 及图像 $g(x,y)\in G,g=(g_1,g_2,\cdots,g_m)^{\mathrm{T}}\in R^m$ 与具有形状 F 的图像 $f(x,y)$ 的形状相似度,通过投影算子[1] 所建立的形态相关系数:

$$K_M(f,G)=\frac{\|P_Gf\|}{\|f\|}=\frac{\|f_G\|}{\|f\|},\qquad(1)$$

进行度量,其中 P_G 是空间 G 上的投影算子:

$$P_Gf(x,y)=f_G(x,y)=\sum_{k=1}^{m}f_{G_k}\chi G_k(x,y),(x,y)\in\Omega.$$

这里 $f_{G_k}=(f,\chi_{G_k})/\|\chi_{G_k}\|^2$,$\|\chi_{G_k}\|^2,k=1,2,\cdots,m$ 是划分 G 的子区域 G_k 的面积.

在分片常函数图像的"强度-几何"模型下,图像的强度和几何特征是通过强度向量和空间域的划分来描述的.在基于投影算子相关系数的研究中,划分区域的面积是重要的几何特征量,划分区域上图像强度的取值若视为一随机变量,则其分布与子区域的面积相关.为此,引入基于面积的相关变量:设 A 为空间域 Ω 的面积,$s_{F_i}=(\chi_{F_i},\chi_{F_i})=\|\chi_{F_i}\|^2$ 为 F_i 的面积,$s_{G_j}=(\chi_{G_j},\chi_{G_j})=\|\chi_{G_j}\|^2$ 为 G_j 的面积,$s_{ij}=(\chi_{F_i},\chi_{G_j})$ 为 $F_i\cap G_j$ 的面积.显然有:

$$A=\sum_{i=1}^{n}S_{F_i}=\sum_{j=1}^{m}S_{G_j},S_{F_i}=\sum_{j=1}^{m}S_{ij},S_{G_j}=\sum_{i=1}^{n}S_{ij}.$$

将图像 f 的形状 $F=\{F_1,F_2,\cdots,F_n\}$ 及图像 g 的形状 $G=\{G_1,G_2,\cdots,G_m\}$ 视为随机场,在空间域 Ω 固定的条件下,应用互信息的相关方法,这些面积变量对应于形状随机场的边缘和联合概率分布为:

$$p_F(f_i)=s_{F_i}/A,p_G(g_j)=s_{G_j}/A,$$
$$p_{FG}(f_i,g_j)=s_{ij}/A,p_{F\mid G}(f_i\mid g_j)=s_{ij}/s_{G_j}.$$

在图像的分片随机模型描述方式下,图像 f 的强度 $f=(f_1,f_2,\cdots,f_n)^{\mathrm{T}}$ 分布建立在其形状随机场 F 相关分布的基础上.

2　强度-几何相关系数

考虑图像 $f(x,y)$ 的强度随机向量 $f=(f_1,f_2,\cdots,f_n)^{\mathrm{T}}$ 中第 i 个强度随机变量 f_i 的均值 $E(f_i)=\mu_i$,协方差 $\mathrm{cov}(f_i,f_k)=\sigma_{ik}(i,k=1,2,\cdots,n)$ 及图像 f 的强度均值 $f_0=(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)^{\mathrm{T}}$.用中心化图像 $f-f_0=(f_1-\mu_1,f_2-\mu_2,\cdots,f_n-\mu_n)^{\mathrm{T}}$ 替代 f,利用形状随机场的边缘和联合概率分布,可以计算出中心化图像 $f-f_0$ 的相关量化表示形式:

$$\begin{cases}\|f-f_0\|^2=\sum_{i=1}^{n}(f_i-\mu_i)^2s_{F_i},\\\|P_G(f-f_0)\|^2=\sum_{j=1}^{m}f_{G_j}^2s_{G_j},\end{cases}\qquad(2)$$

其中:

$$P_G(f-f_0)=\sum_{j=1}^{m}f_{G_j}\chi_{G_j},f_{G_j}=\sum_{i=1}^{n}(f_i-\mu_i)\frac{s_{ij}}{s_{G_j}}.\qquad(3)$$

在(1)式中,引入图像 f 的均方范数替代范数,建立形状 F 与形状 G 的中心化强度-几何均方形态相关系数:

$$K_{MC}^2(F,G)=\frac{E(\|P_G(f-f_0)\|^2)}{E(\|f-f_0\|^2)},\qquad(4)$$

其中:

$$E(\|P_G(f-f_0)\|^2)=\sum_{j=1}^{m}E(f_{G_j}^2)s_{G_j}=\sum_{j=1}^{m}E\left(\left(\sum_{i=1}^{n}(f_i-\mu_i)\frac{s_{ij}}{s_{G_j}}\right)^2\right)s_{G_j}=\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{s_{G_j}}\left(\sum_{i,k=1}^{n}\sigma_{ik}s_{ij}s_{kj}\right),$$

$$E(\|f-f_0\|^2)=\sum_{i=1}^{n}E(f_i-\mu_i)^2s_{F_i}=\sum_{i=1}^{n}\sigma_{ii}s_{F_i},$$

引入系数矩阵:

$R_G=(r_{ij})_{n\times m}, r_{ij}=\frac{s_{ij}}{\sqrt{s_{G_j}}}$; $\Sigma=(\sigma_{ik})_{n\times n}, (\sigma_{ik}=\sigma_{ki})$; $s_F=\mathrm{diag}(s_{F_1}, s_{F_2}, \cdots, s_{F_n})$; $\Lambda=\mathrm{diag}(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \cdots, \sigma_{nn})$,

则可得出系数 $K_{MC}^2(F,G)$ 的矩阵形式:

$$K_{MC}^2(F,G)=\frac{\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{s_{G_j}}\left(\sum_{i,k=1}^{n}\sigma_{ik}s_{ij}s_{kj}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\sigma_{ii}s_{F_i}}=\frac{\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}r_{ij}\left(\sum_{k=1}^{n}\sigma_{ik}r_{kj}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\sigma_{ii}s_{F_i}}=\frac{tr(R_G^{\mathrm{T}}\Sigma R_G)}{tr(\Lambda s_F)}. \tag{5}$$

若令 $E(\|f-f_0\|^2)=\sum_{i=1}^{n}\sigma_{ii}s_{F_i}=\sigma_F$,则 $K_{MC}^2(F,G)$ 还可表示为:

$$K_{MC}^2(F,G)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\frac{s_{ij}}{s_{G_j}}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sigma_{ik}}{\sigma_F}s_{kj}=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}K_{MG}(F_i,G_j)K_{MF}(F_i,G_j), \tag{6}$$

其中:

$$K_{MG}(F_i,G_j)=\frac{s_{ij}}{s_{G_j}}, K_{MF}(F_i,G_j)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sigma_{ik}}{\sigma_F}s_{kj}, \tag{7}$$

分别表示 F_i 与 G_j 的形状局部相关系数和 F_i 关于 G_j 的区域局部影响系数. 显然 $K_{MC}^2(F,G)$ 关于 F 和 G 是不对称的:$K_{MC}^2(F,G)\neq K_{MC}^2(G,F)$,即系数 K_{MC}^2 与投影空间的选择有关. 从(5)式的表现形式看,系数 K_{MC}^2 不仅依赖于几何相关矩阵 R_G,还依赖于强度协方差矩阵 Σ,从这个意义上说,K_{MC}^2 是一种"强度-几何"相关系数.

由(6)、(7)式知,系数 K_{MC}^2 所具有的"强度-几何"特征主要反映在区域影响系数 $K_{MF}(F_i,G_j)$ 的构成上,$K_{MF}(F_i,G_j)$ 是由 F 与 G 的划分分裂 $F\cap G=\cup(F_i\cap G_j)$ 及目标图像的强度信息所确定. 局部相关系数 $K_{MG}(F_i,G_j)$ 依赖于空间域 Ω 的划分和投影空间的选择,描述的是空间域 Ω 两种不同划分相对于投影空间的相似程度,该项指标还有以下两种常用的形式:

$$K_{MS}(F_i,G_j)=\frac{F_i\cap G_j \text{ 的面积}}{F_i\cup G_j \text{ 的面积}}=\frac{s_{ij}}{s_{F_i}+s_{G_j}-s_{ij}},$$

及特性函数的线性相关系数:

$$K_{MN}(F_i,G_j)=\frac{(\chi_{F_i},\chi_{G_j})}{\|\chi_{F_i}\|\,\|\chi_{G_j}\|}=\frac{s_{ij}}{\sqrt{s_{F_i}s_{G_j}}}.$$

显然以上两个系数具有对称性:$K_{MS}(F_i,G_j)=K_{MS}(G_j,F_i)$,$K_{MN}(F_i,G_j)=K_{MN}(G_j,F_i)$. 用它们分别替代局部相关系数 $K_{MG}(F_i,G_j)$,系数 K_{MC}^2 则分别表现为以下形式:

$$K_{MS}^2(F,G)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\frac{s_{ij}}{s_{F_i}+s_{G_j}-s_{ij}}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sigma_{ik}}{\sigma_F}s_{kj},$$

$$K_{MN}^2(F,G)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\frac{s_{ij}}{\sqrt{s_{F_i}s_{G_j}}}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sigma_{ik}}{\sigma_F}s_{kj}.$$

3 几何相关系数

以上讨论了中心化的强度-几何均方形态相关系数 K_{MC}^2 的一般形式(5)和(6),其所考虑的目标图像的强度分布表现为随机向量,相关系数 K_{MC}^2 通过协方差矩阵 Σ 与随机变量 $f_i(i=1,2,\cdots,n)$ 相关联. 在一些特定的条件下,协方差矩阵 Σ 具有相对简单的形式,相关系数 K_{MC}^2 在结构上将更加明确.

(1) 当随机变量 $f_i(i=1,2,\cdots,n)$ 相互独立时,$\sigma_{ik}=0, i\neq k$, $\Sigma=\Lambda$,此时

$$K_{MC}^2(F,G)=\frac{tr(R_G^{\mathrm{T}}\Lambda R_G)}{tr(\Lambda s_F)}=\frac{\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}\sigma_{ii}r_{ij}^2\right)}{\sum_{i=1}^{n}\sigma_{ii}s_{F_i}}=\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\sigma_{ii}}{\sigma_F}r_{ij}^2\right), K_{MF}(F_i,G_j)=\frac{\sigma_{ii}}{\sigma_F}s_{ij}.$$

(2) 当 $f_i(i=1,2,\cdots,n)$ 独立同分布,且 $f_0=0$(零向量)时,$\sigma_{ik}=E(f_if_k)=0, i\neq k$, $\sigma_{ii}=E(f_i^2)=\sigma^2(i=1,2,\cdots,n)$, $\Sigma=\Lambda=\sigma^2I_n$, I_n 为 n 阶单位矩阵,将系数 K_{MC}^2 记为 K_M^2:

$$K_M^2(F,G)=\frac{tr(R_G^{\mathrm{T}}R_G)}{tr(s_F)}=\frac{\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}r_{ij}^2\right)}{\sum_{i=1}^{n}s_{F_i}}=\frac{1}{A}\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}r_{ij}^2\right), K_{MF}(F_i,G_j)=\frac{s_{ij}}{A}. \tag{8}$$

$$\begin{cases} K_{MS}^2(F,G)=\frac{1}{A}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\frac{s_{ij}^2}{s_{F_i}+s_{G_j}-s_{ij}}, \\ K_{MN}^2(F,G)=\frac{1}{A}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\frac{s_{ij}^2}{\sqrt{s_{F_i}s_{G_j}}}. \end{cases} \tag{9}$$

在(9)式中的 K_{MS}^2 和 K_{MN}^2 均具有对称性,分别称为对称几何相关系数和几何线性相关系数.

(3) 当$f_i(i=1,2,\cdots,n)$独立同分布,且$f_0=0$时,运用$\bar{f}_0=(\mu,\mu,\cdots,\mu)^T$对图像$f$进行中心化,$\mu$为图像$f$的强度均值:$\mu=E(f)=\sum_{i=1}^{n}f_i p(f_i)=\sum_{i=1}^{n}f_i s_{F_i}/A$,则(3)式中$P_G(f-\bar{f}_0)$的系数具有形式:

$$\bar{f}_{G_j}=\sum_{i=1}^{n}(f_i-\mu)\frac{s_{ij}}{s_{G_j}}=\sum_{i=1}^{n}f_i\frac{s_{ij}}{s_{G_j}}-\mu=\sum_{i=1}^{n}f_i\frac{s_{ij}}{s_{G_j}}-\sum_{i=1}^{n}f_i\frac{s_{F_i}}{A}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}f_i\left(\frac{s_{ij}}{s_{G_j}}-\frac{s_{F_i}}{A}\right),$$

故:

$$E(\|P_G(f-\bar{f}_0)\|^2)=\sum_{j=1}^{m}E(\bar{f}_{G_j}^2)s_{G_j}=$$

$$\sum_{j=1}^{m}E\left(\left(\sum_{i=1}^{n}f_i\left(\frac{s_{ij}}{s_{G_j}}-\frac{s_{F_i}}{A}\right)\right)^2\right)s_{G_j}=$$

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2\left(\frac{s_{ij}}{s_{G_j}}-\frac{s_{F_i}}{A}\right)^2 s_{G_j},$$

$$E(\|f-\bar{f}_0\|^2)=\sum_{i=1}^{n}E(f_i-\mu)^2 s_{F_i}=$$

$$\sigma^2\left(\sum_{i=1}^{n}s_{F_i}-2\sum_{i=1}^{n}\frac{s_{F_i}^2}{A}+\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{s_{F_k}^2}{A^2}\right)s_{F_i}\right)=$$

$$\sigma^2\left(A-\frac{2}{A}\sum_{i=1}^{n}s_{F_i}^2+\frac{1}{A}\sum_{i=1}^{n}s_{F_i}^2\right)=$$

$$\sigma^2\left(A-\frac{1}{A}\sum_{i=1}^{n}s_{F_i}^2\right)=\sigma^2 A\left(1-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{s_{F_i}}{A}\right)^2\right).$$

此时,相关系数:

$$K_{MC}^2(F,G)=\frac{E(\|P_G(f-\bar{f}_0)\|^2)}{E(\|f-\bar{f}_0\|^2)}=$$

$$\frac{\sum_{j=1}^{m}\frac{s_{G_j}}{A}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{s_{ij}}{s_{G_j}}-\frac{s_{F_i}}{A}\right)^2}{1-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{s_{F_i}}{A}\right)^2}. \tag{10}$$

这也即是文献[1]中系数的形式. 利用(8)、(10)式还可以表示为以下形式:

$$K_{MC}^2(F,G)=\frac{K_M^2(F,G)-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{s_{F_i}}{A}\right)^2}{1-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{s_{F_i}}{A}\right)^2}.$$

由(8)、(10)式所给出的相关系数K_{MC}^2仅依赖于图像的几何形状,不依赖于图像的强度取值,故称其为几何-几何相关系数,或几何相关系数.

4 序化几何相关系数

在Pyt'ev的图像模型下,如果强度向量$f=(f_1,f_2,\cdots,f_n)^T$满足:$f_1<f_2<\cdots f_n$,则图像f在增性映射ϕ下其强度是保序的[1],即图像$\phi(f)$的强度亦满足:$\phi(f_1)<\phi(f_2)<\cdots\phi(f_n)$.基于此可建立图像$f$几何形状$F=\{F_1,F_2,\cdots,F_n\}$的有序划分:$F^+=\{F_1<F_2<\cdots<F_n\}$,这里$F_i<F_j\Leftrightarrow f_i<f_j$,$F^+$称为图像$f$的有序形状.

对于给定的图像f和g,设强度向量$f=(f_1,f_2,\cdots,f_n)^T$和$g=(g_1,g_2,\cdots,g_m)^T$中的分量均是两两互异的,则可通过以下的序化函数实现其基于强度的形状排序. 在空间域Ω上对每一个F_i(或G_j)定义其上的强度序化函数:

$$\mu_{F_i}^+(x,y)=\begin{cases}1,f(x,y)>f_i\\0,f(x,y)\leqslant f_i\end{cases},$$

$$\mu_{F_i}^-(x,y)=\begin{cases}1,f(x,y)<f_i\\0,f(x,y)\geqslant f_i\end{cases},(x,y)\in\Omega,$$

$$\mu_{F_i}(x,y)=\mu_{F_i}^+(x,y)-\mu_{F_i}^-(x,y),(x,y)\in\Omega.$$

由函数$\mu^+(x,y)$,$\mu^-(x,y)$或$\mu(x,y)$在Ω上的取值分布,即可实现对图像强度的排序,从而获得有序形状$F^+=\{F_1<F_2<\cdots<F_n\}$和$G^+=\{G_1<G_2<\cdots<G_m\}$. 且序化函数与有序形状$F^+$有如下关系:若$i<k$,则$\mu_{F_i}(F_k)=\mu_{F_i}^+(F_k)=1$,$\mu_{F_k}(F_i)=\mu_{F_i}^-(F_k)=-1$,$\mu_{F_i}(F_i)=0$.

有序形状$F^+=\{F_1<F_2<\cdots<F_n\}$和$G^+=\{G_1<G_2<\cdots<G_m\}$的比较可以通过局部序化的方法将序化因素植入相关系数:

$$K_\mu(F_i,G_j)=\frac{(\mu_{F_i},\mu_{G_j})}{\|\mu_{F_i}\|\|\mu_{G_j}\|}=\frac{s_{ij}^+-s_{ij}^-}{(A-s_{F_i})(A-s_{G_j})}, \tag{11}$$

或:

$$\begin{cases}K_{\mu^+}(F_i,G_j)=\dfrac{(\mu_{F_i}^+,\mu_{G_j}^+)}{\|\mu_{F_i}^+\|\|\mu_{G_j}^+\|}=\dfrac{s_{ij}^+}{s_{F_i}^+s_{G_j}^+},\\[2ex] K_{\mu^-}(F_i,G_j)=\dfrac{(\mu_{F_i}^-,\mu_{G_j}^-)}{\|\mu_{F_i}^-\|\|\mu_{G_j}^-\|}=\dfrac{s_{ij}^-}{s_{F_i}^-s_{G_j}^-},\end{cases} \tag{12}$$

其中$s_{ij}^{\pm}$分别是关于函数μ_{F_i}和μ_{G_j}的、F与G同号及异号相交区域的面积,$s_{F_i}^{\pm}$分别是F^+中$k>i$及$k<i$

的相关子集 F_k 的面积,其满足 $s_{F_i}^{+}+s_{F_i}^{-}=A-s_{F_i}$. 显然以上系数关于 F_i 和 G_j 具有对称性,即 $K_\mu(F_i,G_j)=K_\mu(G_j,F_i)$. 由此在(8)、(9)式中植入(11)或(12)式,可得到序化几何相关系数:

$$K_M^\mu(F^+,G^+)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}K_{MG}(F_i,G_j)K_{MF}(F_i,G_j)K_\mu(F_i,G_j)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\frac{s_{ij}^{+}-s_{ij}^{-}}{(A-s_{F_i})(A-s_{G_j})}\frac{s_{ij}}{A}\frac{s_{ij}}{s_{G_j}}, \tag{13}$$

$$K_{MS}^\mu(F^+,G^+)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}K_{MS}(F_i,G_j)K_{MF}(F_i,G_j)K_\mu(F_i,G_j)=\frac{1}{A}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\frac{s_{ij}^2}{s_{F_i}+s_{G_j}-s_{ij}}\frac{s_{ij}^{+}-s_{ij}^{-}}{(A-s_{F_i})(A-s_{G_j})}, \tag{14}$$

$$K_{MN}^\mu(F^+,G^+)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}K_{MN}(F_i,G_j)K_{MF}(F_i,G_j)K_\mu(F_i,G_j)=\frac{1}{A}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\frac{s_{ij}^2}{\sqrt{s_{F_i}s_{G_j}}}\frac{s_{ij}^{+}-s_{ij}^{-}}{(A-s_{F_i})(A-s_{G_j})}.$$

类似地,还可以得到由(12)式所导出的单边序化几何相关系数.

在特殊情况下,(11)式具有特定的结构,以上的系数将取特定的值. 如当取 $G^+=F^+$ 时:

$$K_\mu(F_i,F_j)=\frac{(\mu_{F_i},\mu_{F_j})}{\|\mu_{F_i}\|\ \|\mu_{F_j}\|}=\frac{(\mu_{F_i},\mu_{F_j})}{\sqrt{(A-s_{F_i})(A-s_{F_j})}}=\begin{cases}0, i\neq j\\1, i=j\end{cases}, K_M^\mu(F^+,F^+)=1.$$

若假设 F^+ 的逆序为 F^-,则由 $i<k$, $\mu_{F_i^-}(F_k)=-1$, $\mu_{F_k^-}(F_i)=1$, $\mu_{F_i}(F_i)=0$,得:

$$K_\mu(F_i^-,F_j^+)=\frac{(\mu_{F_i^-},\mu_{F_j^+})}{\|\mu_{F_i^-}\|\ \|\mu_{F_j^+}\|}=\frac{(\mu_{F_i^-},\mu_{F_j^+})}{\sqrt{(A-s_{F_i})(A-s_{F_j})}}=\begin{cases}0, i\neq j\\-1, i=j\end{cases}, K_M^\mu(F^-,F^+)=-1.$$

一般地,(13)和(14)式的取值范围是[-1,1],且关于 F^+, G^+ 对称. 如果取 $\mu^+(x,y)$ 或 $\mu^-(x,y)$ 为序化函数,则可以避免系数取负值,此时取值范围是[0,1].

5 结束语

本文对 Vizilter 在文献[3]中的研究工作进行了推广,通过引入强度协方差矩阵给出了更具一般性的随机马赛克图像相似性度量指标. 所研究的相关系数在形式上更好地反映了图像的强度-几何特征间的关联性,且在特定的条件下,将 Vizilter 在文献[3]中的研究结果作为其特例. Vizilter 在文献[3]中的实验测试表明在独立同分布的条件下相关系数在相似性度量的质量上具有优势,但对称系数在实际运用中对噪声表现出不稳定性. 而我们的工作对其在形式上进行了统一.

参 考 文 献

[1] Pyt´ev Y P. Morphological image analysis[J]. Pattern Recogn Image Anal, 1933(3): 19-28.

[2] Evsegneev S O, Pyt´ev Y P. Analysis and recognition of piecewise constant texture images[J]. Pattern Recogn Image Anal, 2006, 16: 398-405.

[3] Vizilter Y V, Zheltov S Y. Geometrical correlation and matching of 2D images shapes[J]. ISPRS Ann Photogramm Remote Sens Spatial Inf Sci, 2012, I-3: 191-196.

[4] Vizilter Y V, Zheltov S Y. Projective morphologies and their application in structural analysis of digital images[J]. J Comput Syst Sci Int, 2008, 47: 944-958.

[5] Vizilter Y V, Zheltov S Y. Similarity measure and comparison metrics for image shapes[J]. J Comput Syst Sci Int, 2014, 53(4): 542-555.

[6] Vizilter Y V, Gorbatsevich V S, Rubis A Y, et al. Shape-based image matching using heat kernels and diffusion maps[J]. Intenational Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences, 2014, XL-3: 357-364.

(责任编辑 曹 东)