容量限制非对称网络设计模型及算法

谌永荣

(中南民族大学 数学与统计学学院,武汉 430074)

摘　要　为了缓解交通压力,通常会对已有的路网进行改造以提高其通行能力,针对这类带容量限制的非对称弹性需求网络设计问题,提出了它的模型及算法.模型中上层同时考虑了增加新路段和对已有的路段进行扩容,下层是非对称网络的用户平衡问题,提出的算法克服了求解这类问题时计算量大及路径枚举等困难,计算实例表明算法是有效的.

关键词　容量限制; 非对称网络; 网络设计

中图分类号　O221.2　**文献标识码**　A　**文章编号**　1672-4321(2018)04-0142-03

Model and Algorithm for Network Design Problem with Capacity Constraints in the Asymmetric Network

Chen Yongrong

(College of Mathematics and Statistics, South-Central University for Nationalities, Wuhan 430074, China)

Abstract　In order to alleviate traffic pressure, the existing road network is usually modified to improve its capacity. In this paper, the elastic demand network design problem with capacity constraints in the asymmetric network is discussed. The model and algorithm are proposed. The upper model is considered by two segments: new road added and the existing road expanded. The lower is a user equilibrium problem in asymmetric network. The proposed algorithm overcomes the difficulties of calculation and path enumeration when solving such problems. The numerical results show that the algorithm is effective.

Keywords　capacity constraints; asymmetric network; network design

一般路网中通常假定各路段的行驶费用只与本路段的流量有关,且关于路段流量是连续可微的,这在很多情况下是合理的,称该网络为对称网络. 此时,网络设计问题可建成一个二层规划模型[1].如果各路段的行驶费用不仅与自身的流量有关,还与其他路段上的流量有关,而且路段费用向量关于路段流量变量的雅克比矩阵是非对称的,称该网络为非对称网络.由于社会经济快速发展,车流量与日俱增,造成城市交通越来越拥挤,车辆的行驶费用不仅与自身的行驶路段流量有关,且与网络的其他路段流量有关,因而实际的交通网络多为非对称.这时网络设计问题中下层的用户平衡就不能写成一个数学规划模型,大部分用变分不等式和非线性互补问题来描述[2].本文研究带容量限制的非对称网络设计问题[3],上层同时考虑了增加车道后对交通状况的改善情况和投资费用问题[4],下层问题则是一个变分不等式.

1　容量限制网络设计模型

考虑道路网络 $G=(N,A)$,其中 N 为网络节点集,A 为路段集合,设 $\bar{A}\subset A$ 为拟改造路段集,可记为 $\bar{A}=\{1,2,\cdots,m\}$,(r,s) 是以 r 为起点,s 为终点的 $O-D$ 对.c_a 为路段 a 允许通过的最大流量(若 a 为新

收稿日期　2018-07-24

作者简介　谌永荣(1975-),女,副教授,研究方向: 系统优化与管理决策,E-mail: yongrongchen2000@sina.com

基金项目　国家自然科学基金资助项目(11401595)

增路段，则 $c_a=0$）；x_a 为路段 a 上的流量，它们组成的向量为 $x=(\cdots,x_a,\cdots)$；b_a^i 为路段 a 实施第 $i(i=1,2,\cdots,n)$ 级改造的扩容量，它们组成的矩阵记为 $B=(b_a^i)_{m\times n}$. 进行 i 级改造后路段 a 的容量为 $c_a+b_a^i$，组成的向量记为 $c=(\cdots,c_a,\cdots)$；d_a^i 为路段 a 进行 i 级改造所需投资额，它们组成的矩阵记为 $D=(d_a^i)_{m\times n}$；$t_a(x_a)$ 为路段 a 上的行驶时间（或费用），组成的向量记为 $t=(\cdots,t_a,\cdots)$；f_k^{rs} 为对 $O-D$ 对 (r,s) 间路径 k 上的流量. $y_a^i=\begin{cases}1,\text{若路段 } a \text{ 进行第 } i \text{ 级扩容}\\0,\text{否则}\end{cases}$，它们组成的矩阵记为 $Y=(y_a^i)_{m\times n}$；Δ 为路段与路径关联矩阵，Λ 为 $O-D$ 对路径关联矩阵，$q_{rs}=D_{rs}(u_{rs})$ 为 $O-D$ 对 rs 间的需求量，它们组成的向量记为 $q=D(u)$，本文假定每个需求函数都有反函数且所有反函数组成的向量记为 $D^{-1}(q)$.

网络设计模型:

上层

$$\min Z=\sum_{a\in A}x_a t_a(x_a,y_a^i)+\theta\sum_{a=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}d_a^i y_a^i$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}y_a^i\leqslant 1, a=1,\cdots,m,\\ y_a^i=0 \text{ 或 } 1, a=1,\cdots,m, i=1,\cdots,n.\end{cases}$$

下层

求向量 $(x^*,q^*)\in\Omega$，满足对任意的 $(x,q)\in\Omega$ 都有:

$$t(x^*)^{\mathrm{T}}(x-x^*)-D^{-1}(q^*)^{\mathrm{T}}(q-q^*)\geqslant 0,$$

此时 $\Omega=\{(x,q)\mid x=\Delta f,\Lambda f=q,x\leqslant c,f\geqslant 0,q\geqslant 0\}$.

2　模型的求解算法

2.1　求解下层问题的算法

本文的下层是一个带容量限制的变分不等式问题，采用仿真算法[5]求解.

步骤 1: 令迭代次数 $k=0$，第 i 个 $O-D$ 对的最短路径集合 $A_i=\varnothing$，误差 $\varepsilon>0$，各路段初始流量均为 0，计算各 $O-D$ 间最短路径及行驶时间 p_i^k,u_i^k. 把需求量 q_i^k 按全有全无进行分配，求出各路段行驶时间 t^k，令 $d_a^k=\begin{cases}t_a^k-t_a(c)+\Delta d_a^k,\text{若 } x_a^k>c_a\\0,\text{否则}\end{cases}$，其中 $\Delta d_a^k\geqslant 0$ 可随机产生，更新最短路径集合 A_i；

步骤 2: 计算 $t_a^{k+1}=t_a^k+d_a^k, p_i^{k+1}, u_i^{k+1}$，若 $p_i^{k+1}\notin A_i$，则 $A_{i+1}=A_i\cup p_i^{k+1}$. 计算

$$\bar{q}^{k+1}\begin{cases}D_i(u_i^{k+1}),\text{如果 } u_i^{k+1}\geqslant B_i(q_i^k),\\ q_i^k+\alpha_i^{k+1}(D_i(u_i^0)-q_i^k),\text{否则}.\end{cases}$$

将 $\bar{q}^{k+1}$ 按全有全无分配到新产生的路径上，新得到的各条路径和路段上的流量记为 $\bar{f}^k,\bar{x}^k$，对 $O-D$ 对 i，按下式在其最短路径集合中分配流量，$f_{p_i}^{k+1}=\alpha_i^{k+1}\bar{f}_{p_i}^k+(1-\alpha_i^{k+1})\cdot f_{p_i}^k\cdot\frac{u_i^{k+1}}{u_{p_i}}$，$q_i^{k+1}=\sum_{p\in A_i}f_{p_i}^{k+1}$，其中 $0\leqslant\alpha_i^{k+1}\leqslant 1$ 为加权系数;

步骤 3: 如果 $\max_{a\in A}|x_a^{k+1}-x_a^k|+\max_{a\in A}\{0,x_a^{k+1}-c_a\}+\max_i|q_i^{k+1}-q_i^k|\leqslant\varepsilon$，停止; 否则转步骤 4;

步骤 4: 令 $d_a^{k+1}=\begin{cases}d_a^k+\Delta d_a^{k+1},\text{若 } x_a^{k+1}\geqslant c_a\\0,\text{否则}\end{cases}$，$\Delta d_a^{k+1}=\left\{0,\Delta d_a^k+\frac{1}{k+1}(x_a^{k+1}-c_a)\right\}$，$k:=k+1$，转步骤 1.

2.2　整体算法的迭代步骤

模型中上层问题采用遗传算法[6]求解.

整体算法迭代如下.

步骤 1: 确定遗传算法的编码及解码方法，随机产生一个由 M 个染色体构成的初始群体 $P(0)$，置 $t:=0$;

步骤 2: 将当前群体 $P(t)$ 中每个染色体转换为对应的 Y，对每个 Y 用上述仿真算法求解下层的最优解;

步骤 3: 将步骤 2 中得到的最优解计算上层问题的目标函数值并将它作为各个染色体的适应度值来评价所有染色体;

步骤 4: 记群体中第 j 个染色体的适应度值为 F_j，对第 $j(j=1,2,\cdots,M)$ 个染色体计算 $p_j=F_j/\sum_{j=1}^{M}F_j$，将 p_j 作为第 j 个染色体的遗传到下一代的概率，将当前群体中每个染色体以其遗传概率来进行比例选择运算;

步骤 5: 对当前群体 $P(t)$ 以交叉概率 p_c 进行单点交叉运算;

步骤 6: 对当前群体 $P(t)$ 以变异概率 p_m 进行均匀变异运算，并在交叉和变异过程中采用保留最佳个体策略，$P(t)$ 经过 3 种遗传操作运算后得到下一代群体 $P(t+1)$;

步骤 7: 若 $t\leqslant T$，则 $t:=t+1$，转步骤 2; 否则算法停止，输出最优解.

3 计算实例

图1为一个9节点的道路网,其中(2,5)和(5,8)是对原有路段改造扩容.

各备选路段对应的扩容量和投资额用下列矩阵表示(单位:10^3元):

$$B=\begin{pmatrix}20&30&40\\20&30&40\\15&25&35\\15&25&35\end{pmatrix},D=\begin{pmatrix}8&15&30\\10&20&30\\20&30&40\\20&30&40\end{pmatrix}.$$

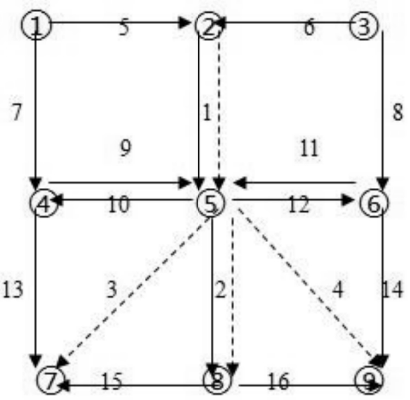

图1 道路网络

Fig.1 Road network

表1 t_a^0 及 c_a 的值

Tab.1 Value of t_a^0 and c_a

路段 a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
t_a^0	2	2	3	3	1	1	2	2	2	1	2	1	2	1	2	2
c_a	45	45	0	0	35	30	30	35	36	40	35	35	35	30	40	40

本算例中路段 a 行驶时间采用函数:$t_a = t_a^0\left[1+\alpha\left(\frac{x_a+0.1x_{\bar{a}}}{c_a}\right)^\beta\right]$,其中 t_a^0 为路段 a 的自由流行驶时间,α,β 为参数且由路段交通特性来确定,可根据路网实际情况取值,本文取 $\alpha=0.5$,$\beta=2$.取 $D_{19}=D_{37}=55$,需求函数 $q_{rs}=D_{rs}\cdot\exp\left[0.5\left(1-\frac{u_{rs}}{u_{rs}^0}\right)\right]$,$u_{rs}^0$ 为 $O-D$ 对(r,s)间的自由流行驶时间.

表2 算法结果

Tab.2 Results of the algorithm

θ	X	投资费用 /10^3 元	行驶时间 /min	CPU 时间 /s
0.001	(3,0,3,2)	100	1221.38	73.23
0.300	(3,0,3,1)	90	1218.21	74.68
1.000	(2,0,3,1)	75	1247.12	67.57
5	(1,0,2,1)	58	1537.46	79. 46
15	(1,0,0,0)	8	1841.23	81.52
20	(0,0,0,0)	0	2167.20	84.96

4 结束语

本文讨论了带容量限制的非对称路网设计问题,给出了问题的模型和算法,并用一个小型的路网来检验算法的可行性,从结果可知,θ 越大,表明决策者越看重投资费用,路网投资费用随着 θ 的增大而减小,与表2计算结果是一致的,表明该算法有效.

参 考 文 献

[1] Yang H, Bell M G H. Models and algorithm for road network design: A review and some new developments [J]. Transportation Review, 1998,18: 257-278.

[2] 高自友,张好智,孙会君.城市交通网络设计问题中的双层规划模型与算法研究[J].交通运输系统工程与信息,2004,4(1):35-44.

[3] Gao Z Y, Wu J J, Sun H J. Solution algorithm for the bi-level discrete network design problem [J]. Transportation Research B,2005,39: 479-495.

[4] 谌永荣,黄崇超.带平衡约束的离散网络平衡设计问题的遗传算法[J].数学杂志,2012,32(1):152-156.

[5] 刘炳全,陈 斌,度 巍.非对称弹性需求网络容量限制交通分配有效算法[J].数学的实践与认识,2018(11):133-139.

[6] 周 明,孙树栋.遗传算法原理及应用[M].北京:国防工业出版社,2005.

(责任编辑 曹 东)