

# 两个复杂网络的指数同步的最优牵制控制

杨占英 唐小云

(中南民族大学 数学与统计学学院 武汉 430074)

**摘要** 研究了两个复杂网络指数同步的最优牵制控制问题.基于线性反馈策略,给出了两个网络达到指数同步的牵制准则.通过具体例子展示了牵制节点数目和反馈增益的可行组合的计算方法以及最优组合的确定方法,同时也分析了耦合强度和网络的稠密程度对最优牵制比的影响.最后,给出两个例子验证了该最优控制方法的有效性.

**关键词** 复杂网络;指数同步;线性反馈控制;牵制控制

中图分类号 O231;TP273 文献标识码 A 文章编号 1672-4321(2018)04-0145-06

## Optimal Pinning Control of Exponential Synchronization between Two Complex Networks

Yang Zhanying, Tang Xiaoyun

(College of Mathematics and Statistics, South-Central University for Nationalities, Wuhan 430074, China)

**Abstract** In this paper, the problem of optimal pinning control for the exponential synchronization between two complex networks is investigated. Based on the linear feedback scheme, a pinning criterion is given to ensure the exponential synchronization can be achieved between two complex networks. For the feasible combination of pinned node number and feedback gain, a specific example is used to show the computation method and how to find their optimal combination. Meanwhile, it is analyzed that the optimal pinning ratio is effected by the coupling strength and the density of networks. Finally, two examples are provided to demonstrate the effectiveness of the optimal pinning control method.

**Keywords** complex network; exponential synchronization; linear feedback control; pinning control

复杂网络的同步是指网络中各个相互作用节点趋于一致的行为,它在物理学、生物学、化学、经济学和社会学都有广泛的应用.在现实中,许多网络的同步通过自身的耦合是难以实现的,即使可以也需要付出很大的代价,这时就需要利用一些控制方法.对于复杂的大规模网络来说,牵制控制是一个简单有效的方法.牵制控制的基本思想是通过控制网络中的部分节点,来达到有效控制整个网络的目的.

在以往的一些牵制方法<sup>[1-4]</sup>中,有的需要耦合强度充分大,有的需要反馈增益很大,还有的计算量会非常大,这在复杂网络控制应用中都是难以实现的,对于控制方法而言,我们总是希望用较小的控

制代价来实现控制目标.Li R, et al<sup>[5]</sup>利用耦合强度和反馈增益定义控制代价,发现牵制网络中牵制度小的节点可能会比牵制度大的节点所需的代价小.随后,Wang L, et al<sup>[6]</sup>利用此代价函数研究了牵制节点数目的估计,完成了基于线性矩阵不等式的牵制控制策略分析.在文献[7]中,Zhao J C, et al研究了复杂网络在弱耦合强度下的优化线性反馈牵制控制问题,通过选取与牵制比和反馈增益比相关的代价函数,找出受控节点和反馈增益间的平衡.此外,Porfiri M, et al为避免同时控制网络中所有节点,提出了点对点优化牵制控制策略<sup>[8]</sup>.

在本文中,我们考虑了两个线性耦合复杂动态

收稿日期 2018-08-01

作者简介 杨占英(1982-),女,副教授,博士,研究方向:复杂网络同步控制、均匀化理论,E-mail: yangzhanying8011@163.com

基金项目 国家自然科学基金资助项目(11401595)

网络的指数同步问题.基于线性反馈牵制控制,给出了两层网络达到全局指数同步的条件.对于满足条件的牵制节点数和反馈增益,它们二者中的一个减小通常会引起另一个的增大,因此,我们需要找到二者的最优组合.这里,通过具体例子,展示了牵制节点数和反馈增益这一可行组合的确定步骤.同时,受文[7]中的评价函数的启发,我们定义一个评价函数并找出最优组合.此外,通过仿真,分析了最优牵制比(最优组合中的牵制节点数目与总节点数目之比)与耦合强度、网络稠密程度的相关性.最后,给出两个例子验证了该最优控制方法的有效性.

### 1 模型描述和预备知识

考虑  $N$  个不同节点线性耦合的复杂动态网络,其中每个节点都是  $n$  维的动力系统,具体模型如下:

$$\dot{x}_i(t) = f_i(x_i) + c \sum_{j=1}^N a_{ij} P x_j(t), \quad (1)$$

其中  $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})^T \in R^n$  是第  $i$  个节点的状态变量,  $f_i$  是反映第  $i$  个节点的动力学行为的连续向量函数,  $c > 0$  是网络的耦合强度,  $P \in R^{n \times n}$  是状态变量之间连接关系的内部耦合矩阵, 矩阵  $A = (a_{ij})_{N \times N}$  表示网络的外耦合矩阵, 其中元素  $a_{ij}$  定义为: 当节点  $i$  与节点  $j$  ( $i \neq j$ ) 有连接边时, 记  $a_{ij} = 1$ , 否则为 0; 当  $i = j$  时,  $a_{ii}$  满足  $a_{ii} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N a_{ij}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ .

考虑另一个具有  $N$  个节点方程(1)同构的复杂动态网络,模型如下:

$$\dot{y}_i(t) = f_i(y_i) + c \sum_{j=1}^N a_{ij} P y_j(t) + u_i, \quad (2)$$

其中  $y_i = (y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{in})^T \in R^n$  是第  $i$  个节点的状态变量,  $u_i$  是待设计的控制器. 通常方程(1)被称为驱动网络, 方程(2)被称为响应网络.

定义 1 假设存在常数  $M$  和  $\alpha > 0$ , 使得:

$$\|x_i(t) - y_i(t)\| \leq M e^{-\alpha t}, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

则称驱动网络(1)与响应网络(2)达到全局指数同步.

假设 1 对于  $f_i(x) \in C(R^n, R^n)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , 存在常数  $\delta_i$ , 对任意的  $x, y \in R^n$  有:

$$(x - y)^T (f_i(x) - f_i(y)) \leq \delta_i (x - y)^T (x - y),$$

上述条件通常称为全局 Lipschitz 条件,  $\delta_i$  称为 Lipschitz 常数. 容易验证, 一些混沌系统, 如 Chua's 电路和 Rössler-like 系统都满足此条件.

引理 1<sup>[1]</sup> 假设

$$H = \begin{pmatrix} H_1 & H_3 \\ H_3^T & H_2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其中  $H, D \in R^{N \times N}$ ,  $H_1, D_1 \in R^{r \times r}$  ( $1 \leq r < N$ ) 是一个正定对角矩阵, 且  $H_1$  和  $H_2$  均为对称矩阵. 若当  $d_i \rightarrow +\infty$  ( $1 \leq i < r$ ) 时,  $\lambda_{\max}(H - D)$  存在, 则当  $d_i \rightarrow +\infty$  ( $1 \leq i < r$ ),  $\lambda_{\max}(H - D) = \lambda_{\max}(H_2)$ .

要使引理 1 成立,  $d_i$  必须是无穷大, 这使得实际中其应用非常受限. 为解决这一问题, Zhao J C, et al 在文[7]中引入了一个松弛因子  $\varepsilon_0$ , 进一步分析了引理 1 的结果.

引理 2<sup>[7]</sup> 若  $\lambda_{\max}(H_2) < 0$ , 则对某个  $0 < \varepsilon_0 < |\lambda_{\max}(H_2)|$ , 一定存在  $d > 0$ , 使得当  $d_i \geq d$  ( $1 \leq i < r$ ) 时,  $\lambda_{\max}(H - D) \leq \lambda_{\max}(H_2) + \varepsilon_0 < 0$ .

### 2 全局指数同步的牵制准则与优化

先引入驱动网络和响应网络达到全局指数同步的一个线性反馈牵制准则. 不失一般性, 假设响应系统的前  $l$  个节点为牵制节点, 控制器具体如下:

$$u_i = \begin{cases} -cd(y_i - x_i), & i = 1, 2, \dots, l, \\ 0, & i = l + 1, l + 2, \dots, N. \end{cases}$$

其中  $d > 0$  为反馈控制增益.

记  $e_i = y_i - x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , 则误差系统为:

$$\begin{cases} \dot{e}_i = f_i(y_i) - f_i(x_i) + c \left( \sum_{j=1}^N a_{ij} P e_j - d e_i \right), \\ \quad i = 1, 2, \dots, l; \\ \dot{e}_i = f_i(y_i) - f_i(x_i) + c \sum_{j=1}^N a_{ij} P e_j, \\ \quad i = l + 1, l + 2, \dots, N. \end{cases} \quad (3)$$

假设内部耦合矩阵  $P$  满足  $\|P\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(P^T P)} > 0$ , 并记  $\gamma = \|P\|_2$ ,  $\mu$  代表  $(P^T + P)/2$  的最小特征值,  $\delta = \max\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_N\}$ ,  $\hat{A}$  表示  $A$  的主对角元素  $a_{ii}$  被  $(\mu/\gamma) a_{ii}$  取代后得到的矩阵,  $\lambda_{l+1}$  是矩阵  $M_{l+1}$  的最大特征值,  $M_{l+1}$  表示同时去除矩阵  $\hat{A}$  的前  $l$  行和前  $l$  列得到的矩阵.

定理 1 设  $f_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) 满足假设 1. 如果对某个  $\varepsilon_0$ , 存在常数  $l \in [1, N - 1]$  和一个反馈增益  $d$  满足  $\lambda_{\max}(\hat{A} - D/\gamma) < \lambda_{l+1} + \varepsilon_0 < -\delta/c\gamma$ , 则在线性反馈牵制控制下驱动网络(1)和响应网络(2)达到全局指数同步.

证明 构造一个 Lyapunov 函数

$$V(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N e_i^T e_i,$$

沿着误差动态系统(3) 计算  $V(t)$  对  $t$  的导数可得:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \sum_{i=1}^N e_i^T \dot{e}_i = \sum_{i=1}^N e_i^T [f_i(y_i) - f_i(x_i)] + \\ &c \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij} e_i^T P e_j - cd \sum_{i=1}^l e_i^T e_i \leq \\ &\delta \sum_{i=1}^N e_i^T e_i + c \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij} P e_j - cd \sum_{i=1}^l e_i^T e_i \leq \\ &\delta \sum_{i=1}^N e_i^T e_i + c\gamma \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N a_{ij} \|e_i^T\| \|e_j\| + \\ &c\mu \sum_{i=1}^N a_{ii} \|e_i^T\| \|e_i\| - cd \sum_{i=1}^l e_i^T e_i = \\ &e^T [\delta I_N + c\gamma(\hat{A} - D/\gamma)] e, \end{aligned}$$

其中  $I_N$  是一个单位矩阵  $e = (\|e_1\|, \|e_2\|, \dots, \|e_N\|)^T$   $D = \text{diag}\{d, \dots, d, 0, \dots, 0\}$   $\hat{\lambda}_1$  是矩阵  $\hat{A} - D/\gamma$  的最大特征值, 由引理 2 我们可以选择合适的  $l$  和  $d$  使得  $\hat{\lambda}_1 \leq \lambda_{l+1} + \varepsilon_0$  成立, 则可以得到:

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq [\delta + c\gamma\hat{\lambda}_1] e^T e \leq -2qV = \\ &[\delta + c\gamma(\lambda_{l+1} + \varepsilon_0)] e^T e, \end{aligned}$$

其中  $q = -[\delta + c\gamma(\lambda_{l+1} + \varepsilon_0)] > 0$ . 由比较引理<sup>[9]</sup>, 得到  $V(t) \leq Me^{-2qt}$ , 其中  $M = V(t_0) e^{2qt_0}$ , 进而可得  $\|e_i\| \leq \sqrt{2M} e^{-qt}$ . 因此, 在牵制控制下网络(1) 和(2) 达到全局指数同步.

注: 如果牵制节点数目  $l$  确定, 根据定理 1, 我们可以找到一个最小的反馈增益  $d$  使得网络(1) 和(2) 达到全局指数同步, 同样如果反馈增益  $d$  确定, 根据定理 1 牵制节点的数目也有一个最小值, 达到这个值, 网络(1) 和(2) 可以达到全局指数同步.

一般来说, 牵制节点数目越多, 反馈增益就越小, 反之亦然. 根据定理 1, 我们可以得到一系列的  $(l, d)$  组合, 使得网络(1) 和(2) 达到全局指数同步. 在实际应用中, 为降低控制代价, 自然希望牵制节点数目  $l$  和反馈增益  $d$  最好都比较小. 为此, 我们尝试在所得的可行的  $(l, d)$  组合中找出一个最优的组合.

在本文中, 我们利用文[7] 中引入的评价函数  $G(\hat{l}, \hat{d}) = \hat{l}^\theta \hat{d}^{1-\theta}$ , 其中  $\hat{l} = l/\max(l)$   $\hat{d} = d/\max(d)$ ,  $\max(l)$  代表所有可行组合中最大的牵制节点数目,  $\max(d)$  代表所有的可行组合中  $d$  的最大值, 从可行组合中找到一组最优组合  $(l, d)$ , 使得  $l$  和  $d$  都比较合适. 注意参数  $\theta$  取不同的值,  $G(\hat{l}, \hat{d})$  都有对应的最小值, 它所对应的  $(l, d)$  则为最优组合.

### 3 数值仿真

在本节中, 驱动和响应网络均采用 400 个节点的无标度网络(其中  $m_0 = 12$   $m = 10$ ), 在下面的讨论和仿真中, 我们取内耦合矩阵  $P$  是一个单位矩阵, 对于 3 种牵制方式: 牵制度大的节点、牵制度小的节点和随机牵制节点, 发现 3 种牵制方式的矩阵  $M_i$  最大特征值曲线有一个交点(此时  $l = 180$ ). 当  $l$  不超过 180 时, 牵制度大的节点这一方式的矩阵  $M_i$  的最大特征值比其他两种方式的递减速度要快些, 如图 1 所示. 根据定理 1, 在给定  $l$  和  $\delta$  后, 牵制度大的节点的方式需要的牵制节点数要少, 因此选择牵制度大的节点; 同理, 当  $l$  大于 180 时, 就要选择牵制度小的节点. 这里, 假定仿真中的  $l$  不超过 180, 并且选择牵制度大的节点.

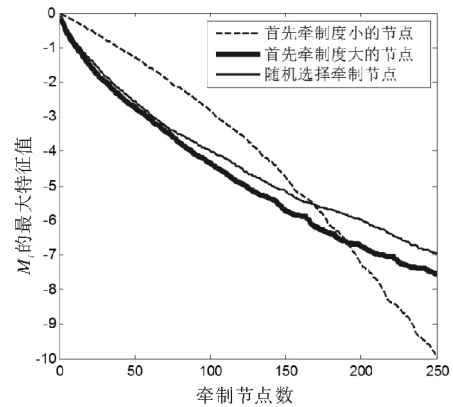


图 1  $M_i$  的最大特征值相对于牵制节点数的变化

Fig.1 The maximum eigenvalue of  $M_i$  with respect to the number of pinned nodes

对于驱动和响应网络, 我们取每个节点都是 3-D 的 Rössler-like 系统, 节点的动力学方程描述为:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\alpha(\vartheta x_1 + \beta x_2 + \varepsilon x_3), \\ \dot{x}_2 = \alpha x_1 + \alpha\gamma x_2, \\ \dot{x}_3 = -\alpha\mu x_3 + \alpha\mu\psi(x_1), \end{cases}$$

其中  $x = (x_1, x_2, x_3)^T \in R^3$   $\alpha = 0.05$   $\beta = 1.5$   $\gamma = 0.2$ ,  $\mu = 1.5$   $\varepsilon = 0.75$   $\rho = 21.43$   $\vartheta = 0.0075$ .

$$\psi(s) = \begin{cases} 0 & s < 2.56; \\ \rho(s - 2.56) & s \geq 2.56. \end{cases}$$

$f$  满足假设 1 的条件, 其中  $\delta = 0.5$ <sup>[10]</sup>. 根据定理 1, 计算发现, 当  $c$  取 3.8 时, 只需要牵制一个节点, 网络(1) 与(2) 可以达到全局指数同步; 当  $c$  取 0.08 时, 至少需要牵制 180 个节点才能达到全局指数同步. 一般来说, 耦合强度越大, 网络消耗的能量就越多, 因此耦合

强度不应取得太大.下面我们取  $c$  为 0.32 ,此时两个网络在无牵制控制作用下的状态可见图 2 ,其中  $E(t) =$

$$1/N \sum_{i=1}^N \sqrt{\|y_i - x_i\|^2}$$

表示同步误差函数.

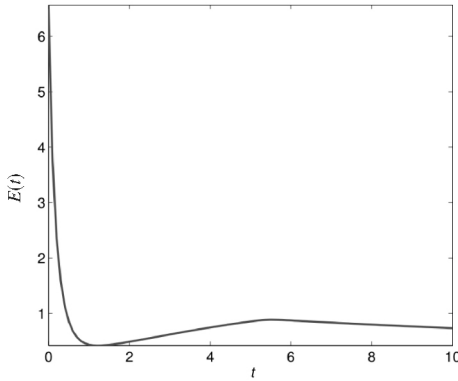


图 2 无牵制时  $E(t)$  的变化

Fig.2 Evolution of  $E(t)$  without pinning

经计算  $\lambda_{22+1} = -1.6031 < -1.5625$  ,所以至少需要牵制 22 个节点 ,网络 (1) 和 (2) 才能达到全局指数同步 ,当  $l = 22$  时 ,由  $\lambda_{\max}(\hat{A} - D/\gamma) < -\delta/c\gamma$  可以计算得到  $d$  的最小值 ,逐渐增加节点数并得到相应的最小的  $d$  值. 当  $l = 180$  时结束 ,这样可以得到一系列可行组合  $(l, d)$  如表 1 所示.

表 1 可行组合  $(l, d)$

Tab.1 Feasible combination  $(l, d)$

可行组合编号	$l$	$d$
1	22	1106
2	23	407
3	24	290
4	25	207
5	27	134
6	29	104
7	31	85
8	33	71
9	35	58
10	37	51
11	39	46
12	41	41
13	43	36
14	45	33
15	50	27
16	55	23
17	60	20
18	70	15.1
19	80	12.2
20	90	10.2
21	100	8.8
22	120	6.9
23	140	5.6
24	160	4.8
25	180	4.1

当  $\theta = 0, 0.1, 0.2, \dots, 0.9, 1$  时  $G(\hat{l}, \hat{d})$  函数相对于可行组合编号(见表 1) 的变化趋势如图 3 所示.

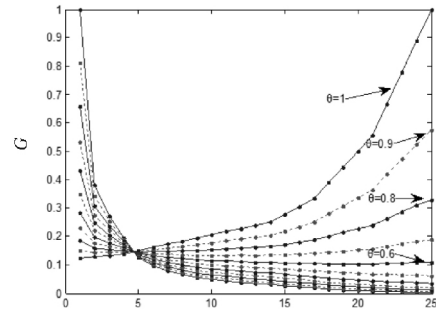


图 3  $G(\hat{l}, \hat{d})$  相对于可行组合编号的变化趋势

Fig.3 The trend of  $G(\hat{l}, \hat{d})$  with respect to the number of feasible combination

从图 3 可知当  $\theta$  在  $0 \sim 0.5$  变化时  $G(\hat{l}, \hat{d})$  是随着  $\hat{l}$  增加而单调递减的 ,说明如果牵制节点数越多 ,则  $G$  值越小; 当  $\theta$  接近 1 时  $G(\hat{l}, \hat{d})$  是随着  $\hat{l}$  增加而单调递增的.正如文献 [7] 中的分析 ,这两种情形下的  $\theta$  取值 ,都是不合适的.当选择  $\theta = 0.6 \sim 0.9$  的评价函数时  $G(\hat{l}, \hat{d})$  存在一个极小值点. 从图 3 中可以看出 ,当  $c = 0.32$  时 ,所有的曲线相交的一点位于编号 4 与 5 之间 ,在这一点 ,牵制数目和反馈增益都不太大 ,所以最优组合应当在这点附近. 根据表 2 ,可以得到  $\theta = 0.8$  所对应的  $G(\hat{l}, \hat{d})$  为最优评价函数 ,最优组合为  $(27, 134)$  ,最优牵制率 6.75% ,且网络 (1) 与 (2) 在这个组合可以达到全局指数同步 ,同步误差变化趋势如图 4 所示.

表 2 不同评价函数下的最优解

Tab.2 The optimal solution with different evaluation functions

$\theta$	$l$	$d$	可行组合编号	牵制比例 /%
0.6	90	10.2	20	22.5
0.7	35	58	9	8.75
0.8	27	134	5	6.75
0.9	23	407	2	5.75

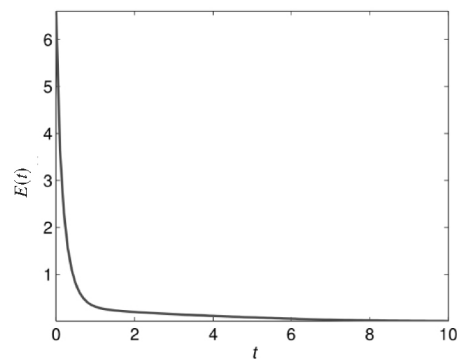


图 4  $E(t)$  在  $l = 27, d = 134$  时的变化趋势

Fig.4 Evolution of  $E(t)$  with  $l = 27, d = 134$

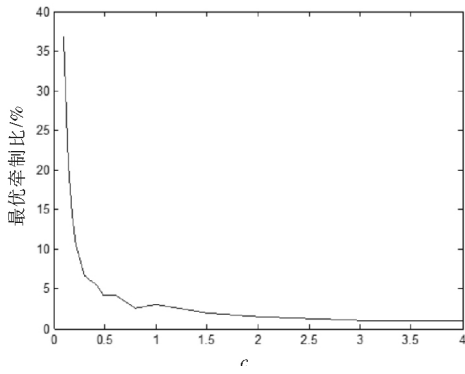


图 5 最优牵制比相对于  $c$  的变化趋势

Fig.5 The trend of the optimal pinning ratio with respect to  $c$

此外,通过数值仿真发现,当网络结构和节点动力学固定时,网络耦合强度  $c$  的变化对最优牵制比是有影响的,具体如图 5 所示.可以看出,随着  $c$  的增加,最优牵制比总体上是递减的,除了个别位置(如  $c = 1$  处)呈现微增.当  $c = 0.1 \sim 0.48$  时,递减趋势比较明显,之后的递减比较缓慢,说明  $c$  比较小时,其较小的扰动都会对最优牵制比有很大的影响, $c$  较大时,其较小的扰动对最优牵制比的影响不是很明显.同时,当

节点动力学、耦合强度和内耦合矩阵固定时,最优牵制比也依赖于网络的稀疏程度.给定  $m_0$ ,当  $m$  逐渐增加时(网络越来越密),最优牵制比逐渐减小,具体如表 3 所示.

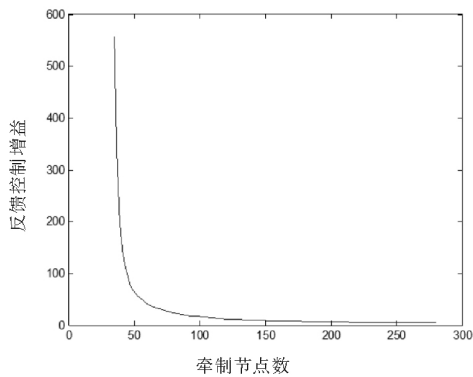
表 3  $m_0 = 12$  时,不同  $m$  下的最优牵制比

Tab.3 The optimal pinning ratio with different  $m$ , when  $m_0 = 12$

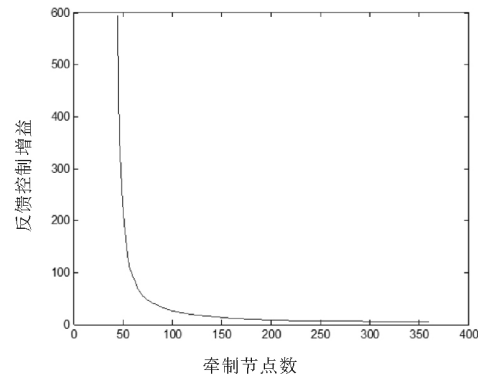
$m$	最优牵制比 /%
4	22.75
6	12
8	7.75
10	6.75
12	5.5

另外,为了验证评价函数模型的可行性,选择  $N = 600$  和  $N = 800$  两种不同规模的无标度网络进行仿真.耦合强度  $c$  同样取 0.32,得到两种情况下的可行组合( $l, d$ ),见图 6、图 7 表 4、表 5.

结合图 7 (a) 和 (b),发现它们与  $N = 400$  时的情形一样,参数  $\theta$  取 0.8 时评价函数仍是最优的.根据表 4 和表 5,发现耦合强度为 0.32 时,这 3 种规模网络的最优牵制比均在 7% 左右.



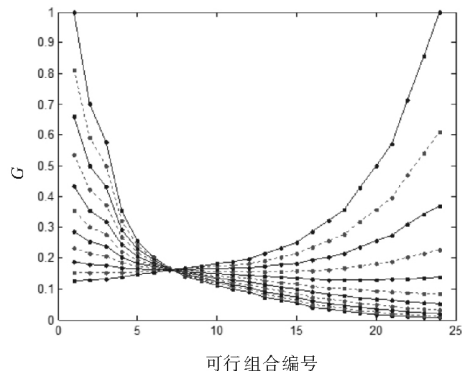
(a)  $N = 600$



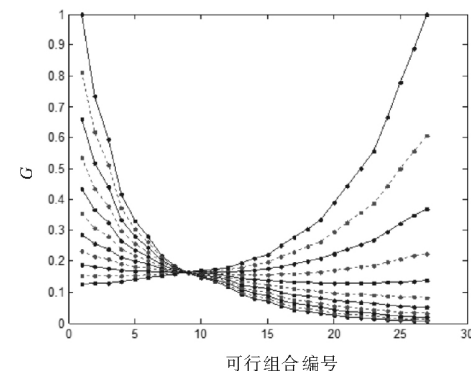
(b)  $N = 800$

图 6  $N = 600$  和  $N = 800$  时的可行组合( $l, d$ )

Fig.6 Feasible combination ( $l, d$ ) with  $N = 600$  and  $N = 800$



(a)  $N = 600$



(b)  $N = 800$

图 7  $N = 600$  和  $N = 800$  时,  $G(l, d)$  相对于可行组合编号的变化趋势

Fig.7 The trend of  $G(l, d)$  with respect to the number of feasible combination when  $N = 600$  and  $N = 800$

表 4  $N=600$  时不同评价函数下的最优解Tab.4 The optimal solution with different evaluation functions when  $N=600$ 

$\theta$	$l$	$d$	可行组合编号	牵制比例/%
0.6	120	11.9	19	20
0.7	60	41	13	10
0.8	45	93	7	7.5
0.9	36	391	2	6

表 5  $N=800$  时不同评价函数下的最优解Tab.5 The optimal solution with different evaluation functions when  $N=800$ 

$\theta$	$l$	$d$	可行组合编号	牵制比例/%
0.6	160	11.9	21	20
0.7	70	50	13	8.75
0.8	57	110	8	7.125
0.9	47	354	3	5.875

## 4 结论

本文研究了两个同构的线性耦合复杂动态网络的指数同步的最优牵制问题. 基于线性反馈牵制控制, 给出了两个网络达到全局指数同步的条件. 对于满足条件的牵制节点数和反馈增益的组合, 通过具体例子展示它的计算方法, 并利用定义的评价函数给出了它们的最优组合, 同时还给出了两个例子验证了该方法的有效性. 此外, 仿真结果表明了网络的耦合强度和稠密程度对最优牵制比有一定的影响. 这些结果将为工程技术工作提供一些参考.

## 参 考 文 献

- [1] Wang X F, Chen G. Pinning control of scale-free dynamical networks [J]. *Physica A*, 2002, 310(3-4): 521-531.
- [2] Li C, Sun W, Kurths J. Synchronization between two coupled complex networks [J]. *Physical Review E*, 2007, 76: 046204.
- [3] Tang H, Chen L, Lu J A, et al. Adaptive synchronization between two complex networks with nonidentical topological structures [J]. *Physica A*, 2008, 387(22): 5623-5630.
- [4] Li Y, Liu Z R, Zhang J B, et al. Synchronization between different networks [J]. *Chinese Physics Letters*, 2008, 25(3): 874.
- [5] Li R, Duan Z S, Chen G. Cost and effect of pinning control for network synchronization [J]. *Chinese Physics B*, 2007, 18(1): 106-118.
- [6] Wang L, Kong X, Shi H, et al. LMI-based criteria for synchronization of complex dynamical networks [J]. *Journal of Physics A* 2008, 41(28): 285102.
- [7] Zhao J C, Lu J A. Pinning control of general complex dynamical networks with optimization [J]. *Science China Information Sciences*, 2010, 53(4): 813-822.
- [8] Porfiri M, Fiorilli F. Node-to-node pinning control of complex networks [J]. *Chaos*, 2009, 19(1): 013122.
- [9] Khalil H. *Nonlinear systems* [M]. 3rd ed. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 2002.
- [10] Sun Y Z, Li W, Ruan J, et al. Finite-time generalized outer synchronization between two different complex networks [J]. *Communications in Theoretical Physics*, 2012, 58(11): 697-703.

(责任编辑 曹 东)