常利率下带干扰的复合 Poisson-Geometric 风险模型的期望折现罚金函数

李学锋,郭仲凯
(中南民族大学 数学与统计学学院,武汉 430074)

摘 要 考虑一类常利率下带随机干扰的风险模型,其中保费收取为时间 t 的线性函数而索赔过程为复合 Poisson-Geometric 过程. 利用盈余过程的强马氏性、全期望公式及 $It\hat{o}$ 积分公式得到期望折现罚金函数的积分-微分方程,进一步得到破产概率的积分-微分方程及其在索赔为指数分布情形下的特殊形式,同时还得出破产时赤字的概率分布.

关键词 复合 Poisson-Geometric 风险模型; 破产概率; 期望折现罚金函数; 积分-微分方程
中图分类号 O211; F840 **文献标识码** A **文章编号** 1672-4321(2018)04-0157-04

The Expected Discounted Penalty Function for a Compound Poisson-Geometric Risk Model with Constant Interest and Disturbance

Li Xuefeng, Guo Zhongkai
(College of Mathematics and Statistics, South-Central University for Nationalities, Wuhan 430074, China)

Abstract In this paper, a compound Poisson-Geometric risk model with constant interest and disturbance is considered. In the model, the premium income is a linear function of time t and the process of the claims follow compound Poisson-Geometric process. By the strong Markov property of the surplus process, the total expectation formula and the $It\hat{o}$ formula, the integro-differential equation of the model for the expected discounted penalty function is derived. Furthermore, the integro-differential equation for the ruin probability is obtained. When the claims are exponentially distributed, the special form of the integro-differential equation for the ruin probability is provided. At the same time, the distribution of the deficit at ruin is also obtained.

Keywords compound Poisson-Geometric risk model; ruin probability; expected discounted penalty function; integro-differential equation

1930 年 Cramer 提出的经典风险模型为风险理论奠定了重要的基础,使风险理论得到广泛的研究,主要研究保险事务中各种随机风险模型的破产概率或生存概率. 但随着社会经济和保险市场的逐步发展,经典风险模型已经不能满足现代保险业务的需求了,于是许多学者对其进行了改进和推广. 文献[1,2]研究了相依风险模型在有限时间内破产概率的渐近表达式. 文献[3]得到了生存概率满足的积分-微分方程. 在文献[4]中,Gerber 和 Shiu 提出的期望折现罚金函数是现代风险理论研究的热点问题,该函数将破产时刻、破产前瞬时盈余和破产时的赤字融入到一个函数中,这一重要的函数为研究破产理论带来很大的方便,根据它可以得到一些具体的精算指标,推动风险理论向前发展. 文献[5,6]得到了常数利率下经典风险模型的期望折现罚金函数满足的积分-微分方程及指数索赔下破产概率的表达式. 文献[7]研究了复合 Poisson 过程风险模型的期望折现罚金函数、破产前瞬时盈余的 Laplace 变换、破产时刻以及破产时赤字满足的积分方程. 文献[8-10]针对不同情形,选择了不同形式的期望折现罚

收稿日期 2018-08-25
作者简介 李学锋(1979-),女,讲师,研究方向:金融数学,E-mail: lxf@mail.scuec.edu.cn
基金项目 国家自然科学基金资助项目(11801575);中央高校基本科研业务专项资金资助项目(CZQ14022)

金函数并研究了破产概率.

本文就是在上述工作的基础上,讨论一类在常数利率下带随机干扰的风险模型,其中保费收入是时间的线性函数,索赔过程为复合 Poisson-Geometric 过程,得到了期望折现罚金函数所满足的积分-微分方程,然后根据该方程给出破产概率所满足的积分-微分方程并得到其在指数索赔下的特殊形式,同时还得到破产时赤字的概率分布函数所满足的积分-微分方程.

1 预备知识

定义1 设 $\lambda > 0, 0 \leqslant \rho < 1$,称 $\{N(t), t \geqslant 0\}$ 是参数为 (λ, ρ) 的 Poisson-Geometric 过程,如果满足:

(1) $N(0) = 0$;

(2) $\{N(t), t \geqslant 0\}$ 具有独立平稳增量;

(3) 对 $t > 0$,有 $N(t) \sim PG(\lambda t, \rho)$.

定义2 设 $\{N(t), t \geqslant 0\}$ 是参数为 (λ, ρ) 的 Poisson-Geometric 过程,$\{X_i, i = 1, 2, \cdots\}$ 为独立同分布的随机变量序列,且与 $\{N(t), t \geqslant 0\}$ 独立,令 $Y(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$,则称 $\{Y(t), t \geqslant 0\}$ 为复合 Poisson-Geometric 过程.

性质 如果随机变量 $X \sim PG(\lambda, \rho)$,则当 $0 < \rho < 1$ 时,X 的概率分布为:

$$P(X = 0) = \mathrm{e}^{-\lambda},$$

$$P(X = k) = \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{j=1}^{k} \frac{(k-1)!}{(j-1)!\,(k-j)!\,j!} \cdot [\lambda(1-\rho)]^{j} \rho^{k-j}, k = 1, 2, \cdots.$$

注 定义2中的 ρ 称为偏离参数,刻画事故发生次数与索赔次数的差异. 当 $\rho = 0$ 时,Poisson-Geometric 过程即是 Poisson 过程.

2 模型介绍

定义3 设 (Ω, F, P) 是完备的概率空间(本文所有的随机变量都定义在此空间),则对 $u \geqslant 0, t \geqslant 0$,保险公司在 t 时刻的盈余为:

$$U(t) = u\mathrm{e}^{\delta t} + \int_0^t \mathrm{e}^{\delta(t-s)} \mathrm{d}R(s), \quad (1)$$

其中 $R(t) = ct - S(t) + \sigma W(t)$,$c$ 为保险公司单位时间内收到的保险费,$S(t)$ 为索赔过程,$\{W(t), t \geqslant 0\}$ 为标准 Wiener 过程,表示保险公司不确定性收益和支出,$\sigma > 0$ 为扰动系数,$u \geqslant 0$ 为保险公司的初始准备金;$\delta \geqslant 0$ 为常数利率.

对上述模型做如下假设:

(1) 索赔过程 $S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$,其中 $\{N(t), t \geqslant 0\}$ 是参数为 (λ, ρ) 的 Poisson-Geometric 过程,表示索赔的到达过程,即保险公司在 $[0, t]$ 内索赔发生的次数;随机变量 X_i 为第 i 次索赔的索赔额且 $\{X_i, i = 1, 2, \cdots\}$ 独立同分布,分布函数为 $F(x)$,概率密度函数为 $f(x)$;从而索赔过程 $S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$ 为复合 Poisson-Geometric 过程;

(2) $\{X_i, i = 1, 2, \cdots\}$,$\{N(t), t \geqslant 0\}$,$\{W(t), t \geqslant 0\}$ 相互独立.

易知风险模型(1)可写为:

$$U(t) = \left(u + \frac{c}{\delta}\right) \mathrm{e}^{\delta t} - \frac{c}{\delta} - \int_0^t \mathrm{e}^{\delta(t-s)} \mathrm{d}S(s) + \sigma \int_0^t \mathrm{e}^{\delta(t-s)} \mathrm{d}W(s). \quad (2)$$

定义4 保险公司的破产时刻 $T = \inf\{t: t \geqslant 0, U(t) < 0\}$(若集合为空集,则 $T = \infty$).

定义5 定义在 $[0, +\infty) \times [0, +\infty)$ 上的非负可测且依赖于破产前的盈余和破产时赤字的函数 $\omega(x, y)$ 称为罚金函数.

令 $I(E)$ 为事件 E 的示性函数,$U(T^-)$ 为破产前的瞬间盈余,$|U(T)|$ 为破产时的赤字,$r \geqslant 0$ 为折现因子,则称

$$\varphi(u) = E\left[\mathrm{e}^{-rT} \omega(U(T^-), |U(T)|) I(T < \infty) \mid U(0) = u\right] \quad (3)$$

为破产时的期望折现罚金函数,也叫 Gerber-Shiu 函数.

特别地,当 $\omega(x, y) = 1, r = 0$ 时,$\varphi(u)$ 为破产概率,即:

$$\varphi(u) = P\{T < \infty \mid U(0) = u\} \stackrel{\triangle}{=} \phi(u), \quad (4)$$

当 $\omega(x, y) = x, r > 0$ 时,$\varphi(u)$ 为破产时刻瞬间盈余的期望折现函数,即:

$$\varphi(u) = E\left[\mathrm{e}^{-rT} U(T^-) I(T < \infty) \mid U(0) = u\right], \quad (5)$$

当 $\omega(x, y) = y, r > 0$ 时,$\varphi(u)$ 为破产时赤字的期望折现函数,即:

$$\varphi(u) = E\left[\mathrm{e}^{-rT} |U(T)| I(T < \infty) \mid U(0) = u\right]. \quad (6)$$

3 主要结果及证明

引理[11] 若 $N(t)$ 是参数为 (λ, ρ) 的 Poisson-Geometric 过程,记 $\alpha = \frac{\lambda(1-\rho)}{\rho}$(若 $\rho = 0$,

则取 $\alpha=\lambda$），则当 $t\to 0$ 时，有

$$P\{N(t)=0\}=\mathrm{e}^{-\lambda t}=1-\lambda t+o(t),$$

$$P\{N(t)=k\}=\alpha\rho^k t+A_k(t)o(t),k=1,2,\cdots,$$

其中，$A_k(t)=\rho^k+(k-1)[\rho(1+\alpha t)]^{k-2}$，$o(t)$ 与 k 无关，且 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}A_k(t)$ 一致收敛.

记 $F^{*k}(x)=\int_0^x F^{*(k-1)}(x-t)\,\mathrm{d}F(t)\ (k\geqslant 1)$ 为索赔概率分布的 k 重卷积；

$f^{*1}(x)=f(x)$，$f^{*k}(x)=\int_0^x f^{*(k-1)}(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t\ (k\geqslant 1)$ 为索赔概率密度的 k 重卷积；

并记 $F_\rho(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}(1-\rho)\rho^{k-1}F^{*k}(x)$，$\bar F_\rho(x)=1-F_\rho(x)$，$f_\rho(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}(1-\rho)\rho^{k-1}f^{*k}(x)$.

定理　对任意 $u\geqslant 0$，风险模型(1)的期望折现罚金函数 $\varphi(u)$ 满足如下积分-微分方程：

$$\frac{1}{2}\sigma^2\varphi''(u)+(c+u\delta)\varphi'(u)-(\lambda+r)\varphi(u)+\lambda\left[\int_0^u\varphi(u-x)f_\rho(x)\,\mathrm{d}x+\int_u^\infty\omega(u,x-u)f_\rho(x)\,\mathrm{d}x\right]=0. \tag{7}$$

证明　令

$$H(t)=\left(u+\frac{c}{\delta}\right)\mathrm{e}^{\delta t}-\frac{c}{\delta}+\sigma\int_0^t \mathrm{e}^{\delta(t-s)}\,\mathrm{d}W(s)-u,$$

在充分小的时间段 $(0,t]$ 内，考虑(1)式所定义的风险过程 $U(t)$，根据是否发生索赔，分为两类事件：

事件 B_1：在 $(0,t]$ 内没有索赔发生，即 $B_1=\{N(t)=0\}$，其发生的概率为：

$$P(B_1)=\mathrm{e}^{-\lambda t}=1-\lambda t+o(t);$$

事件 B_2：在 $(0,t]$ 内有 k 次索赔发生，即 $B_2=\{N(t)=k\}$，其发生的概率为：

$$P(B_2)=\alpha\rho^k t+A_k(t)o(t),k=1,2,\cdots.$$

由盈余过程的强马氏性和全期望公式有：

$$\varphi(u)=\sum_{i=1}^{2}E[\varphi(u)\mid B_i]P(B_i)=\mathrm{e}^{-rt}E[\varphi(u+H(t))](1-\lambda t+o(t))+\mathrm{e}^{-rt}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_0^{u+H(t)}\varphi(u+H(t)-x)f^{*k}(x)\,\mathrm{d}x+\int_{u+H(t)}^{\infty}\omega(u+H(t),x-u-H(t))f^{*k}(x)\,\mathrm{d}x\right)\cdot[\alpha\rho^k t+A_k(t)o(t)]\right]+o(t), \tag{8}$$

又由 $It\hat{o}$ 积分公式可知：

$$E[\varphi(u+H(t))]=\varphi(u)+(c+u\delta)\varphi'(u+H(t))t+\frac{1}{2}\sigma^2\varphi''(u+H(t))t+o(t).$$

由引理知，(8)式中各项级数均一致收敛，由单调收敛定理，求和号与积分号可交换次序，故

$$\varphi(u)=\mathrm{e}^{-rt}\left[\varphi(u)+(c+u\delta)\varphi'(u+H(t))t+\frac{1}{2}\sigma^2\varphi''(u+H(t))t\right](1-\lambda t)+\mathrm{e}^{-rt}\lambda t\left(\int_0^{u+H(t)}\varphi(u+H(t)-x)f_\rho(x)\,\mathrm{d}x+\int_{u+H(t)}^{\infty}\omega(u+H(t),x-u-H(t))f_\rho(x)\,\mathrm{d}x\right)+o(t), \tag{9}$$

进一步整理得：

$$\mathrm{e}^{rt}\varphi(u)=\varphi(u)+(c+u\delta)\varphi'(u+H(t))t+\frac{1}{2}\sigma^2\varphi''(u+H(t))t-\lambda t\varphi(u)+\mathrm{e}^{-rt}\lambda t\left(\int_0^{u+H(t)}\varphi(u+H(t)-x)f_\rho(x)\,\mathrm{d}x+\int_{u+H(t)}^{\infty}\omega(u+H(t),x-u-H(t))f_\rho(x)\,\mathrm{d}x\right)+o(t). \tag{10}$$

将 $\mathrm{e}^{rt}=1+rt+o(t)$ 代入上式并两边同时除以 t，令 $t\to 0$，化简得：

$$\frac{1}{2}\sigma^2\varphi''(u)+(c+u\delta)\varphi'(u)-(\lambda+r)\varphi(u)+\lambda\left(\int_0^u\varphi(u-x)f_\rho(x)\,\mathrm{d}x+\int_u^\infty\omega(u,x-u)f_\rho(x)\,\mathrm{d}x\right)=0.$$

即(7)式成立.

推论 1　破产概率 $\phi(u)$ 满足如下积分-微分方程：

$$\frac{1}{2}\sigma^2\phi''(u)+(c+u\delta)\phi'(u)-\lambda\phi(u)+\lambda\left[\int_0^u\phi(u-x)f_\rho(x)\,\mathrm{d}x+\bar F_\rho(x)\right]=0. \tag{11}$$

证明　在(3)式中令 $r=0$，$\omega(x,y)=1$，则：

$$\varphi(u)=P\{T<\infty\mid U(0)=u\}\overset{\triangle}{=}\phi(u),$$

$$\int_u^\infty\omega(u,x-u)f_\rho(x)\,\mathrm{d}x=\int_u^\infty f_\rho(x)\,\mathrm{d}x=1-F_\rho(x)=\bar F_\rho(x).$$

再由(7)式即得(11)式.

推论 2　若索赔额服从参数为 α 的指数分布，即 $f(x)=\begin{cases}\alpha\mathrm{e}^{-\alpha x},x>0\\0,x\leqslant 0\end{cases}$，则破产概率 $\phi(u)$ 满足如下积分-微分方程：

$$\frac{1}{2}\sigma^2\phi''(u)+(c+u\delta)\phi'(u)-\lambda\phi(u)+\lambda\mathrm{e}^{-\alpha(1-\rho)u}\left[\alpha(1-\rho)\int_0^u\phi(z)\mathrm{e}^{\alpha(1-\rho)z}\mathrm{d}z+1\right]=0. \tag{12}$$

证明　易知 $f^{*k}(x)=\int_0^x f^{*(k-1)}(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t=$

$\frac{\alpha^k}{(k-1)!}x^{k-1}e^{-\alpha x}$, $f_\rho(x)=\sum_{k=1}^{\infty}(1-\rho)\rho^{k-1}f^{*k}(x)=(1-\rho)\alpha e^{-\alpha(1-\rho)x}$.

令 $z=u-x$,则:

$$\int_0^u\phi(u-x)f_\rho(x)\,dx+\int_u^\infty f_\rho(x)\,dx=e^{-\alpha(1-\rho)u}\left[\alpha(1-\rho)\int_0^u\phi(z)e^{\alpha(1-\rho)z}dz+1\right],$$

从而有:

$$\frac{1}{2}\sigma^2\phi''(u)+(c+u\delta)\phi'(u)-\lambda\phi(u)+\lambda e^{-\alpha(1-\rho)u}\left[\alpha(1-\rho)\int_0^u\phi(z)e^{\alpha(1-\rho)z}dz+1\right]=0,$$

即(12)式成立.

推论3 破产时赤字 $|U(T)|$ 的分布函数满足如下积分-微分方程:

$$\frac{1}{2}\sigma^2\varphi''(u,v)+(c+u\delta)\varphi'(u,v)-\lambda\varphi(u,v)+\lambda\left[\int_0^u\varphi(u-x,v)f_\rho(x)\,dx+F_\rho(u+v)-F_\rho(u)\right]=0. \tag{13}$$

证明 在(3)式中令 $r=0,\omega(x,y)=I(y\leqslant v)$,则:

$$\varphi(u)=P[|U(T)|\leqslant v,T<\infty)|U(0)=u]\triangleq\varphi(u,v),$$

$$\int_u^\infty\omega(u,x-u)f_\rho(x)\,dx=\int_u^\infty I(x\leqslant u+v)f_\rho(x)\,dx=\int_u^{u+v}f_\rho(x)\,dx=F_\rho(u+v)-F_\rho(u),$$

故(7)式可写为:

$$\frac{1}{2}\sigma^2\varphi''(u,v)+(c+u\delta)\varphi'(u,v)-\lambda\varphi(u,v)+\lambda\left[\int_0^u\varphi(u-x,v)f_\rho(x)\,dx+F_\rho(u+v)-F_\rho(u)\right]=0,$$

即(13)式成立.

4 结束语

本文从现代保险公司的实际运营情形出发,提出了常数利率下带随机干扰的复合 Poisson-Geometric 风险模型,具有较强的实际意义.利用概率论和随机过程等学科的理论方法得到该风险模型的期望折现罚金函数以及破产理论中的几个主要精算指标所满足的积分-微分方程.这些结果对保险公司解决破产概率等问题提供了理论参考,为保险公司设计相应的财务预警系统和保险监管部门设置相应的监管指标系统提供理论依据.当然,现代保险公司的实际经营运作情况往往更加复杂,本文所建风险模型乃至现有的所有风险模型都还有待进一步改进,本文的思想和方法在一定程度上为以后的研究提供了有益的思路.

参 考 文 献

[1] Xiao Y, Guo J. The compound binomial risk model with time-correlated claims [J]. Insurance Mathematics & Economics,2007, 41(1): 124-133.

[2] Lin X, Cao Q, Wang Y. A note on a dependent risk model with constant interest rate [J]. Statistics & Probability Letters,2012,82(4):707-712.

[3] 李学锋,王维峰.一类带干扰的复合 Poisson-Geometric 过程风险模型[J].中南民族大学学报(自然科学版),2016, 35(4):132-136.

[4] Gerber H U, Shiu E S W. On the time value of ruin [J]. North American Actuarial Journal,1998, 2(1):48-72.

[5] Cai J, Dickson D C M. On the expected discounted penalty function at ruin of a surplus process with interest [J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2002, 30(3):389-404.

[6] Wang G J, Wu R. The expected discounted penalty function for perturbed compound Poisson risk process with constant interest [J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2008, 42: 59-64.

[7] Gao J W, Wu L Y. On the Gerber-Shiu discounted penalty function in a risk model with two types of delayed-claims and random income [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2014, 269: 42-52.

[8] Albrecher H,Cheung E C K,Thonhauser S. Randomized observation periods for the compound Poisson risk model: the discounted penalty function [J]. Scandinavian Actuarial Journal, 2013, 2013(6):424-452.

[9] Song M, Meng Q, Wu R, et al. The Gerber-Shiu discounted penalty function in the risk process with phase-type interclaim times [J]. Applied Mathematics & Computation, 2010, 216(2):523-531.

[10] Gerber H U,Shiu E S W.The time value of ruin in a Sparre Andersen Model [J]. North American Actuarial Journal, 2005, 9(2):49-69.

[11] 毛泽春,刘锦萼.索赔次数为复合 Poisson-Geometric 过程的风险模型及破产概率[J].应用数学学报,2005,28(3): 419-428.

(责任编辑 曹 东)