带有多重强耦合 Hardy 项的临界椭圆方程组的基态解

康东升,刘梦茹,高蒙

(中南民族大学 数学与统计学学院,武汉 430074)

摘 要 在全空间中研究了一类带有多重强耦合 Hardy 项的临界椭圆方程组,运用集中紧性原理和 Schwartz 对称化方法研究了极小化序列的收敛性,从而进一步证明了椭圆方程组基态解以及最佳 Sobolev 常数达到函数对的存在性.首次研究了此类椭圆方程组并证明了它的重要性质,为后续研究打下基础.

关键词 强耦合 Hardy 项; 临界指标; 椭圆方程组; 基态解

中图分类号 O175.25 **文献标识码** A **文章编号** 1672-4321(2019)01-0156-05

DOI 10.12130/znmdzk.20190127

引用格式 康东升,刘梦茹,高蒙.带有多重强耦合 Hardy 项的临界椭圆方程组的基态解[J].中南民族大学学报(自然科学版),2019,38(1):156-160.

KANG Dongsheng, LIU Mengru, GAO Meng. Ground state solutions to critical elliptic system with multiple strongly-coupled Hardy terms[J].Journal of South-Central University for Nationalities(Natural Science Edition), 2019,38(1):156-160.

Ground state solutions to critical elliptic system with multiple strongly-coupled Hardy terms

KANG Dongsheng, LIU Mengru, GAO Meng

(College of Mathematics and Statistics, South-Central University for Nationalities, Wuhan 430074,China)

Abstract In this paper, a kind of critical elliptic system is studied in the whole space, which involves multiple strongly-coupled Hardy terms. By the concentration compactness principle and the Schwartz symmetrization methods, the convergence of minimizing sequence is proved. Furthermore, the existence of a ground state solution to the system and the extremal functions to the best Sobolev constant is proved. For the first time, this kind of elliptic system is studied and its important properties are proved, providing fundamental base for the further research.

Keywords strongly-coupled Hardy term; critical exponent; elliptic system; ground state solution

1 相关知识

本文研究如下带有多重强耦合 Hardy 项的临界椭圆方程组:

$$\begin{cases} -\Delta u - \dfrac{\mu_1 u + \lambda v}{|x|^2} = u^{2^*-1} + \dfrac{\eta\alpha}{2^*}u^{\alpha-1}v^{\beta}, \\ \qquad x \in \mathbb{R}^N\backslash\{0\}, \\ -\Delta v - \dfrac{\lambda u + \mu_2 v}{|x|^2} = v^{2^*-1} + \dfrac{\eta\beta}{2^*}u^{\alpha}v^{\beta-1}, \\ \qquad x \in \mathbb{R}^N\backslash\{0\}, \\ (u,v) \in (D^{1,2}(\mathbb{R}^N))^2, u,v > 0, x \in \mathbb{R}^N\backslash\{0\}, \end{cases} \tag{1}$$

其中参数满足下列条件:

(H_1) $N \geqslant 3, 1 < \alpha,\beta < 2^*-1, \alpha+\beta = 2^*, 0 < \mu_1,\mu_2 < \bar{\mu}, \eta > 0, \lambda > 0, \lambda^2 < \min\{\mu_1,\mu_2,(\bar{\mu}-\mu_1)(\bar{\mu}-\mu_2)\}$.

这里 $2^* := \dfrac{2N}{N-2}$ 是 Sobolev 临界指数,$\bar{\mu} := \left(\dfrac{N-2}{2}\right)^2$ 是如下 Hardy 不等式中的最佳常数[1]:

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{u^2}{|x|^2}\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{\bar{\mu}}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2\mathrm{d}x, \forall u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N),$$

收稿日期 2018-10-12

作者简介 康东升(1967-),男,教授,博士,研究方向:偏微分方程,E-mail: dongshengkang@scuec.edu.cn

基金项目 国家自然科学基金资助项目(11601530)

$D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ 是 $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ 关于范数 $\left(\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla\cdot|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}$ 的完备化空间.

自从 2001 年 Bose-Einstein 凝聚理论被证实以后，有关 Bose-Einstein 凝聚的研究便是国际物理学界研究的热门领域之一，研究者们为 Bose-Einstein 凝聚建立了相应的数学物理方程组，如下所示:

$$\begin{cases}-\Delta u+V_1(x)u=\mu_1u^3+\upsilon uv^2, x\in\mathbb{R}^N,\\ -\Delta v+V_2(x)v=\mu_2v^3+\upsilon u^2v, x\in\mathbb{R}^N,\\ u,v\geqslant 0, x\in\mathbb{R}^N, u(x), v(x)\to 0, \text{当} |x|\to\infty,\end{cases}\tag{2}$$

可以看出方程组(2)是如下方程组的一种特殊情况:

$$\begin{cases}-\Delta u+V_1(x)u=\mu_1u^{2p-1}+\upsilon u^{p-1}v^p, x\in\mathbb{R}^N,\\ -\Delta v+V_2(x)v=\mu_2v^{2p-1}+\upsilon u^{p-1}v^p, x\in\mathbb{R}^N,\\ u,v\geqslant 0, x\in\mathbb{R}^N, u(x), v(x)\to 0, \text{当} |x|\to\infty,\end{cases}\tag{3}$$

这里 $1<p\leqslant 2^*/2$，υ 为耦合常数. 当 $N\geqslant 3$ 时，$2^*:=\frac{2N}{N-2}$ 是 Sobolev 临界指数. 文献[2]研究了下列方程组基态解的存在性，即方程组(3)中 $N\geqslant 3$，$2p=2^*$，$\mu_1=\mu_2=1$ 且 $V_i(x)=-\frac{\lambda_i}{|x|^2}$ 的情况:

$$\begin{cases}-\Delta u-\frac{\mu_1u}{|x|^2}=u^{2^*-1}+\eta u^{\alpha-1}v^\beta, x\in\mathbb{R}^N\backslash\{0\},\\ -\Delta v-\frac{\mu_2v}{|x|^2}=v^{2^*-1}+\eta u^\alpha v^{\beta-1}, x\in\mathbb{R}^N\backslash\{0\},\\ u,v\in D^{1,2}(\mathbb{R}^N), u,v>0, x\in\mathbb{R}^N\backslash\{0\},\end{cases}\tag{4}$$

其中 $\mu_1,\mu_2\in(0,\bar{\mu})$，$\alpha,\beta>1$，$\alpha+\beta=2^*$，$\eta>0$ 并且 $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ 是 $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ 关于 $\left(\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla\cdot|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}$ 的完备化空间. Figueiredo 在文献[3]中研究了如下满足 Dirichlet 零边界条件的方程组:

$$\begin{cases}-\Delta u=\frac{\lambda v}{|x|^2}, x\in\Omega,\\ -\Delta v=\frac{\lambda u}{|x|^2}, x\in\Omega,\end{cases}\tag{5}$$

这里 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中的一个有界光滑域. 作者指出当 $\lambda>\bar{\mu}$ 时方程组(5)不存在正解.

受到方程组(4)与(5)的启发，本文研究临界椭圆方程组(1)的基态解，它带有方程组(4)中的非耦合 Hardy 项和方程组(5)中的强耦合 Hardy 项以及多重 Sobolev 临界项. 该方程组目前还没有被其他人研究过，是一个全新的问题. 从数学角度出发，方程组(4)其实就是方程组(1)中 $\lambda=0$ 的一种特殊情况，当 $\lambda\neq 0$ 时，方程组(1)中的耦合 Hardy 项使方程组变得更加复杂，增大了研究难度. 本文我们主要研究 $\lambda>0$ 时方程组(1)的基态解.

当条件(H_1)成立时，矩阵 $\mathbf{A}:=\begin{pmatrix}\mu_1&\lambda\\ \lambda&\mu_2\end{pmatrix}$ 是正定的，$0<\gamma_1<\gamma_2<\bar{\mu}$，并且对任意 $(u,v)\in(D^{1,2}(\mathbb{R}^N))^2$ 都有:

$\gamma_1(u^2+v^2)\leqslant\mu_1u^2+2\lambda uv+\mu_2v^2\leqslant\gamma_2(u^2+v^2)$，

其中 γ_1,γ_2 是矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值. 记 $D:=D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$，由 Hardy，Sobolev 和 Young 不等式，可以定义如下最佳 Sobolev 常数:

$$S(\mu):=\inf_{u\in D\backslash\{0\}}\frac{\int_{\mathbb{R}^N}\left(|\nabla u|^2-\mu\frac{u^2}{|x|^2}\right)\mathrm{d}x}{\left(\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2^*}\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{2^*}}}, \mu<\bar{\mu},$$

$$s(\mu_1,\mu_2,\lambda):=\inf_{(u,v)\in D^2\backslash\{(0,0)\}}\cdot\frac{\int_{\mathbb{R}^N}\left(|\nabla u|^2+|\nabla v|^2-\frac{\mu_1u^2+2\lambda uv+\mu_2v^2}{|x|^2}\right)\mathrm{d}x}{\left(\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2^*}+|v|^{2^*}+\eta|u|^\alpha|v|^\beta\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{2^*}}}.\tag{6}$$

方程组(1)对应的能量泛函为:

$$J(u,v):=\frac{1}{2}\cdot\int_{\mathbb{R}^N}\left(|\nabla u|^2+|\nabla v|^2-\frac{\mu_1u^2+2\lambda uv+\mu_2v^2}{|x|^2}\right)\mathrm{d}x-\frac{\eta}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N}(|u|^\alpha|v|^\beta)\mathrm{d}x-\frac{1}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N}(|u|^{2^*}+|v|^{2^*})\mathrm{d}x,$$

其中 $J\in C^1(D\times D,\mathbb{R})$. 对于 $(u,v)\in D\times D\backslash\{(0,0)\}$，若

$$\langle J'(u,v),(\phi,\varphi)\rangle=0, \forall(\phi,\varphi)\in D\times D,$$

则称 (u,v) 是方程组(1)的一个解，这里 $J'(u,v)$ 是 J 在 (u,v) 的 Fréchet 导数. 设 $(u_0,v_0)\in D^2\backslash\{(0,0)\}$ 是方程组(1)的解，并且对于方程组(1)的任意一个解 $(u,v)\in D^2\backslash\{(0,0)\}$ 都有 $J(u_0,v_0)\leqslant J(u,v)$，则称 (u_0,v_0) 为方程组(1)的基态解.

定义极小能量:

$$c':=\inf_{(u,v)\in\mathbb{N}'}J(u,v),$$

这里

$$\mathbb{N}':=\{(u,v)\in D^2\backslash\{(0,0)\}:J'(u,v)(u,v)=0\}.$$

通过直接计算可以得到[4]:

$$c':=\inf_{(u,v)\in D^2\setminus\{(0,0)\}}\max_{t>0}J(tu,tv)=\inf_{(u,v)\in D^2\setminus\{(0,0)\}}\frac{1}{N}\cdot\left[\frac{\int_{\mathbb{R}^N}\left(|\nabla u|^2+|\nabla v|^2-\frac{\mu_1u^2+2\lambda uv+\mu_2v^2}{|x|^2}\right)}{\left(\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2^*}+|v|^{2^*}+\eta|u|^\alpha|v|^\beta\right)^{\frac{2}{2^*}}}\right]^{\frac{N}{2}}=$$

$$\frac{1}{N}S(\mu_1,\mu_2,\lambda)^{\frac{N}{2}}. \tag{7}$$

为了便于表示,定义 $E:=|\nabla u|^2+|\nabla v|^2-\frac{\mu_1u^2+2\lambda uv+\mu_2v^2}{|x|^2}$,$F:=|u|^{2^*}+|v|^{2^*}+\eta|u|^\alpha|v|^\beta$,

则有:

$$\int_{\mathbb{R}^N}E(u,v)\geqslant(Nc')^{\frac{2}{N}}\left(\int_{\mathbb{R}^N}F(u,v)\right)^{\frac{2}{2^*}},\forall(u,v)\in D^2.$$

本文的主要结果可以归纳为以下定理:

定理1 假设条件(H_1)成立,则最佳常数$S(\mu_1,\mu_2,\lambda)$存在正的径向对称且严格递减的达到函数对$(u,v)\in D^2\setminus\{(0,0)\}$,满足$J(u,v)=c'=\frac{1}{N}S(\mu_1,\mu_2,\lambda)^{N/2}$,且$(u,v)$为方程组(1)的基态解.

在本文中,为了书写方便用C来表示常数,有时也会省略积分式中的dx.

2 定理1的证明

本部分证明方程组(1)基态解的存在性.

定理1的证明 令(u^*,v^*)为$(u,v)\in\mathbb{N}'$的Schwartz对称化,其中$u,v\geqslant0$,根据文献[5]可得:

$$\int_{\mathbb{R}^N}F(u,v)\leqslant\int_{\mathbb{R}^N}F(u^*,v^*),$$

$$\int_{\mathbb{R}^N}\frac{\mu_1u^2+2\lambda uv+\mu_2v^2}{|x|^2}\leqslant\int_{\mathbb{R}^N}\frac{\mu_1|u^*|^2+2\lambda u^*v^*+\mu_2|v^*|^2}{|x|^2}$$

再由Pólya-Szegö不等式可得:

$$\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u^*|^2\leqslant\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2,$$

$$\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla v^*|^2\leqslant\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla v|^2.$$

由上可得:

$$\int_{\mathbb{R}^N}E(u^*,v^*)\leqslant\int_{\mathbb{R}^N}E(u,v)=\int_{\mathbb{R}^N}F(u,v)\leqslant\int_{\mathbb{R}^N}F(u^*,v^*),$$

存在$0<t^*\leqslant1$使得$(t^*u^*,t^*v^*)\in\mathbb{N}'$,并且:

$$J(t^*u^*,t^*v^*)=\frac{1}{N}(t^*)^2\int_{\mathbb{R}^N}E(u^*,v^*)\leqslant\frac{1}{N}\int_{\mathbb{R}^N}E(u,v)=J(u,v).$$

选取一个极小化序列$(\tilde{u}_n,\tilde{v}_n)=(\tilde{u}_n^*,\tilde{v}_n^*)\in\mathbb{N}'$,使得当$n\to\infty$时$J(\tilde{u}_n,\tilde{v}_n)\to c'$,这时$\tilde{u}_n,\tilde{v}_n\geqslant0$是径向对称且单调递减的.

记$B(x,R)\subset\mathbb{R}^N$是以$x$为球心,$R>0$为半径的球,定义Levy集中性函数[2]:

$$Q_n(R)=\sup_{y\in\mathbb{R}^N}\int_{B(y,R)}F(\tilde{u}_n,\tilde{v}_n),n=1,2,\cdots,$$

则有$Q_n(R)=\int_{B(0,R)}F(\tilde{u}_n,\tilde{v}_n)$,并且存在$R_n>0$使得:

$$Q_n(R_n)=\int_{B(0,R_n)}F(\tilde{u}_n,\tilde{v}_n)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}F(\tilde{u}_n,\tilde{v}_n),$$

定义:

$$(u_n(x),v_n(x)):=R_n^{\frac{N-2}{2}}(\tilde{u}_n(R_nx),\tilde{v}_n(R_nx))\geqslant0,$$

通过直接计算,可以得到$(u_n,v_n)\in\mathbb{N}'$,$J(u_n,v_n)\to c'$,且$u_n,v_n\geqslant0$为径向对称的递减函数,由伸缩变换的不变性知:

$$\int_{B(0,1)}F(u_n,v_n)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}F(u_n,v_n)=\sup_{y\in\mathbb{R}^N}\int_{B(y,1)}F(u_n,v_n), \tag{8}$$

$$\int_{\mathbb{R}^N}E(u_n,v_n)=\int_{\mathbb{R}^N}F(u_n,v_n)\to Nc'=S(\mu_1,\mu_2,\lambda)^{\frac{N}{2}}, \tag{9}$$

由上式可得$\{(u_n,v_n)\}$在D^2上有界. 故存在子列$\{(u_n,v_n)\}\subset D^2$,使得:

$(u_n,v_n)\rightharpoonup(u,v)$,在$D^2$中,

$(u_n,v_n)\to(u,v)$,a.e.在$\mathbb{R}^N$上,

$(u_n,v_n)\to(u,v)$,在$L_{loc}^{q_1}(\mathbb{R}^N)\times L_{loc}^{q_2}(\mathbb{R}^N)$中,$\forall q_1,q_2\in[1,2^*)$.

由集中紧性原理[6,7]可知,存在至多可数的指标集J,实数$\rho_{x_j},v_{x_j},j\in J$和$x_j\in\mathbb{R}^N\setminus\{0\}$,$\rho_0,v_0,\gamma_0$,使得下面的收敛性成立:

$$|\nabla u_n|^2+|\nabla v_n|^2\rightharpoonup d\rho\geqslant|\nabla u|^2+|\nabla v|^2+\rho_0\delta_0+\sum_{j\in J}\rho_{x_j}\delta_{x_j}, \tag{10}$$

$$F(u_n,v_n)\rightharpoonup dv=F(u,v)+v_0\delta_0+\sum_{j\in J}v_{x_j}\delta_{x_j}, \tag{11}$$

$$\frac{\mu_1 u_n^2 + 2\lambda u_n v_n + \mu_2 v_n^2}{|x|^2} \rightharpoonup \mathrm{d}\gamma = \frac{\mu_1 u^2 + 2\lambda uv + \mu_2 v^2}{|x|^2} + \gamma_0 \delta_0, \tag{12}$$

其中 δ_x 表示在点 x 的 Dirac 质量.为了讨论在无穷远处的集中性[8],我们记:

$$\rho_\infty = \lim_{R\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\int_{|x|>R}(|\nabla u_n|^2 + |\nabla v_n|^2), \tag{13}$$

$$\nu_\infty = \lim_{R\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\int_{|x|>R} F(u_n, v_n), \tag{14}$$

$$\gamma_\infty = \lim_{R\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\int_{|x|>R} \frac{\mu_1 u_n^2 + 2\lambda u_n v_n + \mu_2 v_n^2}{|x|^2}. \tag{15}$$

则有:

$$S(\mu_1, \mu_2, \lambda)^{\frac{N}{2}} = \limsup_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} F(u_n, v_n) = \int_{\mathbb{R}^N} F(u, v) + v_0 + v_\infty + \sum_{j\in J} v_{x_j}. \tag{16}$$

命题 1 $\bar{J}$ 是有限集且对任意 $j \in \bar{J}$,有 $v_{x_j} = 0$ 或 $v_{x_j} \geqslant (S(0,0,0))^{N/2}$.

事实上,对于任意足够小的 $\varepsilon > 0$,取截断函数 $\psi_{x_j} \in C_0^\infty(B_\varepsilon(x_j))$,使得 $0 \leqslant \psi_{x_j} \leqslant 1$,当 $x \in B_{\varepsilon/2}(x_j)$ 时,$\psi_{x_j} = 1$,当 $x \in \mathbb{R}^N \backslash B_\varepsilon(x_j)$ 时,$\psi_{x_j} = 0$,并且 $|\nabla \psi_{x_j}| \leqslant \frac{4}{\varepsilon}$,则有:

$$\begin{aligned}
&\langle J'(u_n, v_n), (u_n\psi_{x_j}, v_n\psi_{x_j})\rangle = \\
&\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u_n|^2 + |\nabla v_n|^2)\psi_{x_j} - \\
&\int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{\mu_1|u_n|^2 + 2\lambda|u_n||v_n| + \mu_2|v_n|^2}{|x|^2}\right)\psi_{x_j} + \\
&\int_{\mathbb{R}^N}(u_n\nabla u_n + v_n\nabla v_n)\nabla\psi_{x_j} - \int_{\mathbb{R}^N} F(u_n, v_n)\psi_{x_j}.
\end{aligned}$$

因为 $x_j \in \mathbb{R}^N \backslash \{0\}$,则由(10) ~ (12)式有:

$$\lim_{\varepsilon\to0}\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}(u_n\nabla u_n + v_n\nabla v_n)\nabla\psi_{x_j} = 0, \tag{17}$$

$$\lim_{\varepsilon\to0}\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u_n|^2 + |\nabla v_n|^2)\psi_{x_j} = \lim_{\varepsilon\to0}\int_{\mathbb{R}^N}\psi_{x_j}\mathrm{d}\rho \geqslant \rho_{x_j}, \tag{18}$$

$$\lim_{\varepsilon\to0}\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} F(u_n, v_n)\psi_{x_j} = \lim_{\varepsilon\to0}\int_{\mathbb{R}^N}\psi_{x_j}\mathrm{d}v = v_{x_j}, \tag{19}$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to0}\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{\mu_1|u_n|^2 + 2\lambda|u_n||v_n| + \mu_2|v_n|^2}{|x|^2}\right)\psi_{x_j} \leqslant \\
&C\lim_{\varepsilon\to0}\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}(|u_n|^2 + |v_n|^2)\psi_{x_j} = 0.
\end{aligned} \tag{20}$$

通过(17) ~ (20)式得:

$$0 = \lim_{\varepsilon\to0}\lim_{n\to\infty}\langle J'(u_n, v_n), (u_n\psi_{x_j}, v_n\psi_{x_j})\rangle \geqslant \rho_{x_j} - v_{x_j}. \tag{21}$$

再由(6)式可得:

$$S(0,0,0)(v_{x_j})^{\frac{2}{2^*}} \leqslant \rho_{x_j}, \forall j \in \bar{J}. \tag{22}$$

根据不等式(21)和(22)可推出命题 1 成立.

命题 2 $v_0 = 0$ 或 $v_0 \geqslant (S(\mu_1, \mu_2, \lambda))^{N/2}$.

事实上,对于任意足够小的 $\varepsilon > 0$,取截断函数 $\varphi_0(x) \in C_0^\infty(B_\varepsilon(0))$,使得 $|\nabla\varphi_0| \leqslant \frac{4}{\varepsilon}$,$0 \leqslant \varphi_0(x) \leqslant 1$,并且当 $x \in (B_{\varepsilon/2}(0))$ 时 $\varphi_0(x) = 1$,当 $x \in \mathbb{R}^N \backslash (B_\varepsilon(0))$ 时 $\varphi_0(x) = 0$.则由(10) ~ (12)式得:

$$\lim_{\varepsilon\to0}\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}(u_n\nabla u_n + v_n\nabla v_n)\nabla\varphi_0 = 0, \tag{23}$$

$$\lim_{\varepsilon\to0}\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u_n|^2 + |\nabla v_n|^2)\varphi_0 = \lim_{\varepsilon\to0}\int_{\mathbb{R}^N}\varphi_0\mathrm{d}\rho \geqslant \rho_0, \tag{24}$$

$$\lim_{\varepsilon\to0}\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} F(u_n, v_n)\varphi_0 = \lim_{\varepsilon\to0}\int_{\mathbb{R}^N}\varphi_0\mathrm{d}v = v_0, \tag{25}$$

$$\lim_{\varepsilon\to0}\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{\mu_1|u_n|^2 + 2\lambda|u_n||v_n| + \mu_2|v_n|^2}{|x|^2}\right)\varphi_0 = \gamma_0, \tag{26}$$

根据(23) ~ (26)式得:

$$0 = \lim_{\varepsilon\to0}\lim_{n\to\infty}\langle J'(u_n, v_n), (u_n\varphi_0, v_n\varphi_0)\rangle \geqslant \rho_0 - \gamma_0 - v_0, \tag{27}$$

由(6)式得:

$$S(\mu_1, \mu_2, \lambda)(v_0)^{\frac{2}{2^*}} \leqslant \rho_0 - \gamma_0, \tag{28}$$

则根据(27)和(28)式可推出命题 2 成立.

命题 3 $v_\infty = 0$ 或 $v_\infty \geqslant (S(\mu_1, \mu_2, \lambda))^{N/2}$.

命题 3 的证明类似于命题 2,这里略去.

综上所述,得到:

$$\begin{cases}
S(\mu_1, \mu_2, \lambda)(v_{x_j})^{\frac{2}{2^*}} \leqslant \\
S(0,0,0)(v_{x_j})^{\frac{2}{2^*}} \leqslant \rho_{x_j} \leqslant v_{x_j}, \forall j \in \bar{J}, \\
S(\mu_1, \mu_2, \lambda)(v_0)^{\frac{2}{2^*}} \leqslant \rho_0 - \gamma_0 \leqslant v_0, \\
S(\mu_1, \mu_2, \lambda)(v_\infty)^{\frac{2}{2^*}} \leqslant \rho_\infty - \gamma_\infty \leqslant v_\infty.
\end{cases} \tag{29}$$

由此可得,v_{x_j},$j \in \bar{J}$,v_0,v_∞ 等于 0 或不小于 $S(\mu_1, \mu_2, \lambda)^{N/2}$,并且 $\bar{J}$ 是有限集.

由(10) ~ (16)式以及(29)式可以得到:

$$S(\mu_1, \mu_2, \lambda)^{\frac{N}{2}} = \lim_{n\to\infty}\sup\int_{\mathbb{R}^N} E(u_n, v_n) \geqslant$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} E(u,v) + \rho_0 - \gamma_0 + \rho_\infty - \gamma_\infty + \sum_{j\in J}\rho_{x_j} \geq S(\mu_1,\mu_2,\lambda)\cdot$$
$$\left(\left(\int_{\mathbb{R}^N} F(u,v)\right)^{\frac{2}{2^*}} + v_0^{\frac{2}{2^*}} + v_\infty^{\frac{2}{2^*}} + \sum_{j\in J} v_{x_j}^{\frac{2}{2^*}}\right) \geq$$
$$S(\mu_1,\mu_2,\lambda)\left(\int_{\mathbb{R}^N} F(u,v) + v_0 + v_\infty + \sum_{j\in J} v_{x_j}\right)^{\frac{2}{2^*}} =$$
$$S(\mu_1,\mu_2,\lambda)^{\frac{N}{2}}. \qquad (30)$$

因此,推出 $\int_{\mathbb{R}^N} F(u,v)$,$v_0$,$v_\infty$ 以及 v_{x_j} 等于0或者等于 $S(\mu_1,\mu_2,\lambda)^{N/2}$.

再由(8)和(9)式可知 $v_\infty \leq \frac{1}{2}S(\mu_1,\mu_2,\lambda)^{N/2}$,因此 $v_\infty = 0$.

如果 $v_{x_j} = S(\mu_1,\mu_2,\lambda)^{N/2}$,由(30)式可以得到对于任意 $j \in \bar{J}$ 都有 $v_0 = 0$ 以及 $\int_{\mathbb{R}^N} F(u,v) = 0$. 由(16)、(29)以及(30)式可得:

$$\rho_0 - \gamma_0 = v_0 = S(\mu_1,\mu_2,\lambda)^{\frac{N}{2}},$$
$$\rho_{x_j} = v_{x_j} = 0, \forall j \in \bar{J}.$$

再由(8)和(9)式,可以得到:

$$\frac{1}{2}S(\mu_1,\mu_2,\lambda)^{\frac{N}{2}} = \lim_{n\to\infty}\sup_{y\in\mathbb{R}^N}\int_{B(y,1)} F(u_n,v_n) \geq \lim_{n\to\infty}\int_{B(0,1)} F(u_n,v_n) = v_0,$$

与假设矛盾,所以得到 $v_{x_j} = 0$. 同理可证得 $v_0 = 0$,

综上所述,可知 $\{(u_n,v_n)\}$ 在 $D^2\backslash\{(0,0)\}$ 中强收敛到 (u,v),使得 $J(u,v) = c'$ 并且

$$\int_{\mathbb{R}^N} E(u,v) = \int_{\mathbb{R}^N} F(u,v) = S(\mu_1,\mu_2,\lambda)^{\frac{N}{2}} > 0,$$

所以 $(u,v) \neq (0,0)$,$u \geq 0$,$v \geq 0$. 利用拉格朗日乘数法可以得到 $J'(u,v) = 0$,(u,v) 为方程组(1)的非负径向对称严格递减的基态解.

由方程组(1)可知当 $u = 0$ 时必有 $v = 0$;当 $v = 0$ 时必有 $u = 0$,因此方程组(1)没有半平凡解,所以当 $J(u,v) = c' = \frac{1}{N}S(\mu_1,\mu_2,\lambda)^{N/2}$ 时,由极大值原理[9]可知 $u,v > 0$,(u,v) 为 $S(\mu_1,\mu_2,\lambda)$ 的正达到函数对,也是方程组(1)的径向对称严格递减的正基态解.

定理1证明完毕.

参 考 文 献

[1] HARDY G, LITTLEWOOD J, POLYA G. Inequalities [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1988: 239-243.

[2] CHEN Z, ZOU W. Existence and symmetry of positive ground states for a doubly critical Schrödinger system [J]. Transactions of the American Mathematical Society, 2015, 367(5): 3599-3646.

[3] FIGUEIREDO D, PERAL I, ROSSI D. The critical hyperbola for a Hamiltonian elliptic system with weights [J]. Annali di Matematica Pura ed Applicata, 2008, 187: 531-545.

[4] 康东升,段笑,龚睫茜. 全空间中带有不同 Hardy 项的临界椭圆方程组的基态解 [J]. 中南民族大学学报(自然科学版), 2016, 35(3): 141-145.

[5] WILLEM M. Analyse fonctionnelle élémentaire [M]. Paris: Cassini Editeurs, 2003: 100-106.

[6] LIONS P L. The concentration compactness principle in the calculus of variations, the limit case (I) [J]. Revista Matematica Iberoamericana, 1985, 1(1): 145-201.

[7] LIONS P L. The concentration compactness principle in the calculus of variations, the limit case (II) [J]. Revista Matematica Iberoamericana, 1985, 1(2): 45-121.

[8] KANG D. Systems of elliptic equations involving multiple critical nonlinearities and different Hardy-type terms in $\mathbb{R}^N$ [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2014, 420(2): 917-929.

[9] VAZQUEZ J. A strong maximum principle for some quasilinear elliptic equations [J]. Applied Mathematics and Optimization, 1984, 12(2): 191-202.

(责任编辑 曹 东)