部分边界可穿透的障碍物的正散射问题

彭超权，李傲，郭军*

(中南民族大学 数学与统计学学院，武汉 430074)

摘　要　考虑一个可穿透障碍物的声波散射问题，障碍物一部分边界可以穿透，另一部分边界不能穿透.入射波在障碍物外部引起散射波，通过可穿透的边界时，在障碍物内部引起透射波.利用单双层位势理论，将问题转化为相应的边界积分方程组，再根据 Fredholm 定理证明了积分方程组解的存在性和唯一性，从而得到散射问题解的适定性.

关键词　声波散射；部分可穿透障碍物；解的适定性

中图分类号　O175.25　**文献标识码**　A　**文章编号**　1672-4321(2019)03-0476-05

DOI　10.12130/znmdzk.20190328

引用格式　彭超权，李傲，郭军.部分边界可穿透的障碍物的正散射问题[J].中南民族大学学报(自然科学版)，2019，38(3)：476-480.

PENG Chaoquan，LI Ao，GUO Jun. Positive scattering problem of partial boundary penetrable obstacles[J].Journal of South-Central University for Nationalities(Natural Science Edition)，2019，38(3)：476-480.

Positive scattering problem of partial boundary penetrable obstacles

PENG Chaoquan，LI Ao，GUO Jun

(College of Mathematics and Statistics，South-Central University for Nationalities，Wuhan 430074，China)

Abstract　The problem of acoustic scattering from a penetrable obstacle is considered. One part of the boundary of the obstacle can be penetrated，and the other part can not be penetrated. The incident wave induces the scattered wave outside the obstacle，and when it passes through the penetrable boundary，it causes the transmission wave inside the obstacle. By using the single-layer and double-layer potential theory，the problem is transformed into a corresponding boundary integral system，and the existence and uniqueness of the solution of the integral system are proved according to Fredholm′s theorem，and the well-posedness of the solution to the scattering problem is obtained.

Keywords　acoustic scattering; partially penetrable obstacle; well-posedness of solution

通常，可穿透障碍物的声波散射问题可以通过 Helmholtz 方程以及障碍物边界上的传输条件来刻画.但是，在一些实际问题中，障碍物的部分边界可能为理想状态下的薄导体，此时声波会从边界的其余部分透射进入障碍物，这就是本文所要考虑的问题.文献[1]利用线性采样方法重构了散射体，但其中的正散射问题没有给出详细证明.类似的散射问题也出现在电磁波、弹性波散射现象中[2,3].

问题的模型描述如下：部分可穿透的散射体是一个无限长的圆柱体，其轴线在 Z 方向，横截面为 $D \subset R^2$.入射电磁场是在圆柱轴方向上传播的平面波，这样电场在 TM 模式下被极化，并且在散射体 D 的内部和外部同时满足 Helmholtz 方程，在边界上具有一些混合边界条件.具体来说，假设 D 是具有光滑边界 ∂D 的有界域，用 D_0 表示散射体的外部.假设散射体 D 位于理想状态下的薄导体 Σ 上，该导体在 R^2

收稿日期　2019-02-22　* **通信作者**　郭军，研究方向：散射理论，E-mail：hssxgj@126.com

作者简介　彭超权(1979-)，男，副教授，博士，研究方向：偏微分方程，E-mail：pcq1979@163.com

基金项目　国家自然科学基金资助项目(11801575)；中央高校基本科研业务费专项资金资助项目(CZT18010)

中是一段光滑开弧,与边界 ∂D 的接触部分用 Γ_2 表示,∂D 其他部分用 Γ_1 表示. 用 v 表示由边界 ∂D 指向 D 的外部的单位法向量. 用 $k(k_0)$ 表示对应区域 D ($D_0\setminus\overline{\Sigma}$) 中的正波数. 模型简图见图 1.

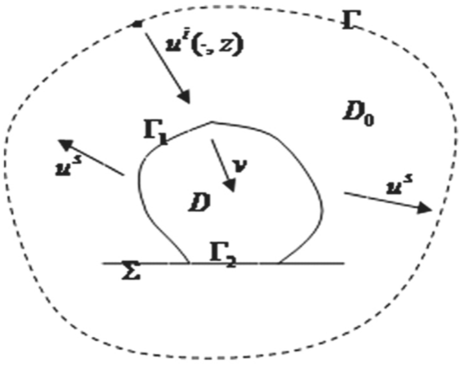

图 1 模型简图

Fig.1 Model sketch diagram

1 边界积分方程组

我们考虑如下边值问题:

$$\begin{cases}\Delta u^s + k_0^2 u^s = 0, & \text{in } D_0\setminus\overline{\Sigma},\\ \Delta v + k^2 v = 0, & \text{in } D,\\ v = 0, & \text{on } \Gamma_2,\\ u^s = h, & \text{on } \Sigma,\\ u^s - v = f, & \text{on } \Gamma_1,\\ \dfrac{\partial u^s}{\partial \nu} + \mathrm{i}\mu u^s - \lambda\dfrac{\partial v}{\partial \nu} = g, & \text{on } \Gamma_1,\\ \lim\limits_{r\to\infty}\sqrt{r}\left(\dfrac{\partial u^s}{\partial r} - \mathrm{i}k_0 u^s\right) = 0, & r = |x|.\end{cases} \tag{1}$$

其中 $f\in H^{1/2}(\Gamma_1)$, $g\in H^{-1/2}(\Gamma_1)$, $h\in H^{1/2}(\Sigma)$, 寻求 $u^s\in H^1_{loc}(D_0\setminus\overline{\Sigma})$, $v\in H^1(D)$.

另外,上述空间的定义为: $H^{1/2}(\Gamma_1):=\{u|_{\Gamma_1}: u\in H^{1/2}(\Gamma)\}$, 其中 $\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_1)$ 是 $H^{1/2}(\Gamma_1)$ 的对偶空间, $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_1):=\{u\in H^{1/2}(\Gamma): \mathrm{supp}u\subseteq\overline{\Gamma}_1\}$, 其中 $H^{-1/2}(\Gamma_1)$ 是 $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_1)$ 的对偶空间.

首先证明问题解的存在性.

定理 1 边值问题(1) 最多只有一个解.

证明 令 $f=g=h=0$, 选择一个半径为 r 的球 B_r, 使 D 和 Σ 被包含在 B_r 内, 在 $B_r\setminus\{\overline{D}\cup\overline{\Sigma}\}$ 和 D 内对 u^s 和 v 分别应用格林公式, 得到:

$$\int_{\partial B_r} u^s\frac{\partial\overline{u^s}}{\partial\nu}\mathrm{d}s = \int_{\Gamma_1} u^s\frac{\partial\overline{u^s}}{\partial\nu}\mathrm{d}s + \int_{B_r\setminus\{\overline{D}\cup\overline{\Sigma}\}}(|\nabla u^s|^2 - k_0^2|u^s|^2)\,\mathrm{d}s,$$

和 $$\int_{\Gamma_1} v\frac{\partial\overline{v}}{\partial\nu}\mathrm{d}s = \int_D(|\nabla v|^2 - k^2|v|^2)\,\mathrm{d}s,$$

因此我们有:

$$\int_{\partial B_r} u^s\frac{\partial\overline{u^s}}{\partial\nu}\mathrm{d}s = \int_{B_r\setminus\{\overline{D}\cup\overline{\Sigma}\}}(|\nabla u^s|^2 - k_0^2|u^s|^2)\,\mathrm{d}s + \lambda\int_D(|\nabla v|^2 - k^2|v|^2)\,\mathrm{d}s + \int_{\Gamma_1}\mathrm{i}\mu u^s\,\overline{u^s}\mathrm{d}s,$$

由上式可得 $\mathrm{Im}\left(\int_{\partial B_r} u^s\dfrac{\partial\overline{u^s}}{\partial\nu}\mathrm{d}s\right) = \mu\int_{\Gamma_1}|u^s|^2\mathrm{d}s.$

根据 Rellich 引理[4], 当 $\mathrm{Im}\left(\int_{\partial B_r} u^s\dfrac{\partial\overline{u^s}}{\partial\nu}\mathrm{d}s\right) = \mu\int_{\Gamma_1}|u^s|^2\mathrm{d}s\geqslant 0$ 时, 在 $D_0\setminus\overline{\Sigma}$ 上 $u^s=0$. 利用透射边界条件得到在 Γ_1 上 $v=0$, $\dfrac{\partial v}{\partial\nu}=0$. 因此根据 Holmgren 唯一性定理得到在 D 上 $v=0$.

证毕.

令 $\Phi(x,y)=\dfrac{\mathrm{i}}{4}H_0^{(1)}(k|x-y|)$, $x\neq y$ 作为二元 Helmholtz 方程的基本解, 为了方便表述, 我们用 Γ_3 表示开弧 Σ. 引进单双层边界积分算子 S_{jl} 和 K_{jl}, 其中 $j,l=1,2,3$, 以及法向导数算子 K'_{jl} 和 T_{jl}.

$$(S_{jl}\varphi)(x):=\int_{\Gamma_j}\Phi(x,y)\varphi(y)\,\mathrm{d}s(y),\ x\in\Gamma_l,$$

$$(K_{jl}\varphi)(x):=\int_{\Gamma_j}\frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial\nu(y)}\varphi(y)\,\mathrm{d}s(y),\ x\in\Gamma_l,$$

$$(K'_{jl}\varphi)(x):=\int_{\Gamma_j}\frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial\nu(x)}\varphi(y)\,\mathrm{d}s(y),\ x\in\Gamma_l,$$

$$(T_{jl}\varphi)(x):=\frac{\partial}{\partial\nu(x)}\int_{\Gamma_j}\frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial\nu(y)}\varphi(y)\,\mathrm{d}s(y),\ x\in\Gamma_l.$$

令 $S_{jl,0}, K_{jl,0}, K'_{jl,0}$ 和 $T_{jl,0}$ 作为积分算子, 定义分别与 S_{jl}, K_{jl}, K'_{jl} 和 T_{jl} 相同, 但是将 $\Phi(x,y)$ 替换为 $\Phi_0(x,y)=\dfrac{\mathrm{i}}{4}H_0^{(1)}(k_0|x-y|)$, $x\neq y$, 其中 $j,l=1,2,3$. 上述算子的映射关系可参考文献[5].

令 u^s,v 有如下形式的解:

$$u^s(x) = \int_{\Gamma_1} \Phi_0(x,y) a(y) \mathrm{d}s(y) - \int_{\Gamma_1} \frac{\partial \Phi_0(x,y)}{\partial \nu(x)} b(y) \mathrm{d}s(y) + \int_{\Gamma_3} \Phi_0(x,y) c(y) \mathrm{d}s(y), \tag{2}$$

$$v(x) = -\frac{1}{\lambda}\int_{\Gamma_1} \Phi(x,y) a(y) \mathrm{d}s(y) + \int_{\Gamma_1} \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \nu(y)} b(y) \mathrm{d}s(y) + \int_{\Gamma_2} \Phi(x,y) e(y) \mathrm{d}s(y), \tag{3}$$

其中 $a \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_1)$,$b \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_1)$,$c \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_3)$,$e \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_2)$,此类空间的定义可参考文献[6].

那么在边界 Γ_1 上:

$$(u^s - v)\mid_{\Gamma_1} = \left(S_{11,0} + \frac{1}{\lambda}S_{11}\right) a - (K_{11,0} + K_{11}) b + S_{31,0}c - S_{21}e,$$

$$\left(\frac{\partial u^s}{\partial \nu} + \mathrm{i}\mu u^s - \lambda\frac{\partial v}{\partial \nu}\right)\mid_{\Gamma_1} = (K'_{11,0} + \mathrm{i}\mu S_{11,0} + K'_{11}) a - (T_{11,0} + \mathrm{i}\mu K_{11,0} + \lambda T_{11}) b + (K'_{31,0} + \mathrm{i}\mu S_{31,0}) c - \lambda K'_{21}e.$$

u^s 和 v 在边界 Γ_3,Γ_2 上分别有:

$$u_s\mid_{\Gamma_3} = S_{13,0}a - K_{13,0}b + S_{33,0}c,$$

$$v\mid_{\Gamma_2} = -\frac{1}{\lambda}S_{12}a + K_{12}b + S_{22}e.$$

如果定义:

$$A = \begin{pmatrix} S_{11,0} + \frac{1}{\lambda}S_{11} & -K_{11,0} - K_{11} & S_{31,0} & -S_{21} \\ M_1 & M_2 & M_3 & -\lambda K'_{21} \\ -\frac{1}{\lambda}S_{12} & K_{12} & 0 & S_{22} \end{pmatrix}, \tag{4}$$

其中 $M_1 = K'_{11,0} + \mathrm{i}\mu S_{11,0} + K'_{11}$,$M_2 = -T_{11,0} - \mathrm{i}\mu K_{11,0} - \lambda T_{11}$,$M_3 = K'_{31,0} + \mathrm{i}\mu S_{31,0}$,且 $\chi = (a,b,c,e)^{\mathrm{T}}$,$B = (f,g,h,0)^{\mathrm{T}}$,那么边值问题可以写成如下边界积分方程:

$$A\chi = B. \tag{5}$$

定义 Sobolev 空间

$$X = \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_1) \times \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_1) \times \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_3) \times \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_2),$$

以及共轭空间

$$X^* = H^{1/2}(\Gamma_1) \times H^{-1/2}(\Gamma_1) \times H^{1/2}(\Gamma_3) \times H^{1/2}(\Gamma_2),$$

A 显然是从 X 映射到 X^* 的有界算子.

2 积分方程(5)的解

定理 2 A 是零指数的 Fredholm 算子.

证明 将 a,b,c 零延拓到整个边界 ∂D.且 $\tilde{a} \in H^{-1/2}(\partial D)$,$\tilde{b} \in H^{1/2}(\partial D)$,$\tilde{e} \in H^{-1/2}(\partial D)$,用 $\tilde{c} \in H^{-1/2}(\partial D)$ 表示 c 在整个边界 ∂D 上的零延拓.

令 $\widetilde{S}_{jl}$,$\widetilde{S}_{jl,0}$,$\widetilde{K}_{jl}$,$\widetilde{K}_{jl,0}$,$\widetilde{K}'_{jl}$,$\widetilde{K}'_{jl,0}$,$\widetilde{T}_{jl}$,$\widetilde{T}_{jl,0}$ 分别为相应于 S_{jl},$S_{jl,0}$,K_{jl},$K_{jl,0}$,K'_{jl},$K'_{jl,0}$,T_{jl},$T_{jl,0}$ 的延拓算子.

这里 $j,l = 1,2,3$.当 $j = 1,2$ 时算子定义在 ∂D 上,当 $j = 3$ 时算子定义在 $\partial\Omega$ 上;当 $l = 1,2$ 时,算子在 ∂D 上取值,当 $l = 3$ 时,算子在 $\partial\Omega$ 上取值.

由参考文献[7],存在正下有界算子:

$$S_l: H^{-1/2}(\partial D) \to H^{1/2}(\partial D),$$
$$-T_l: H^{1/2}(\partial D) \to H^{-1/2}(\partial D),$$

使得:

$$\mathrm{Re}\langle S_{l,0}\psi,\psi\rangle \geqslant c\,\|\psi\|^2_{H^{-1/2}(\partial D)},\psi \in H^{-1/2}(\partial D),$$
$$\mathrm{Re}\langle S_l\psi,\psi\rangle \geqslant c\,\|\psi\|^2_{H^{-1/2}(\partial D)},\psi \in H^{-1/2}(\partial D),$$

和

$$\mathrm{Re}\langle -T_{l,0}\psi,\psi\rangle \geqslant c\,\|\psi\|^2_{H^{1/2}(\partial D)},\psi \in H^{1/2}(\partial D),$$
$$\mathrm{Re}\langle -T_l\psi,\psi\rangle \geqslant c\,\|\psi\|^2_{H^{1/2}(\partial D)},\psi \in H^{1/2}(\partial D),$$

并且

$$\widetilde{S}_{l,0}: = \widetilde{S}_{ll,0} - S_{l,0},\widetilde{S}_l: = \widetilde{S}_{ll} - S_l,$$
$$\widetilde{T}_{l,0}: = -\widetilde{T}_{ll,0} + T_{l,0},\widetilde{T}_l: = -\widetilde{T}_{ll} + T_l,$$

是紧算子,其中 $l = 1,2$.参考文献[3]第七章.

这里 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 定义为 $H^{1/2}(\partial D)$ 和 $H^{-1/2}(\partial D)$ 之间的对偶,对于算子 $\widetilde{S}_{33,0}$ 和 $\widetilde{S}_{33}$ 也有类似的结论,相应正下有界算子为 $S_{3,0}$,S_3: $S^{-1/2}(\partial\Omega) \to S^{1/2}(\partial\Omega)$,定义 $\widetilde{S}_{3,0}: = \widetilde{S}_{33,0} - S_{3,0}$,$\widetilde{S}_3: = \widetilde{S}_{33} - S_3$.令 K_l,$K_{l,0}$,K'_l 和 $\widetilde{K}'_{l,0}$ 的定义分别与 $\widetilde{K}_{ll}$,$\widetilde{K}_{ll,0}$,$\widetilde{K}'_{ll}$ 和 $\widetilde{K}'_{ll,0}$ 相同,但是将 $\Phi(x,y)$ 替换为 $\Phi_0(x,y) = \frac{\mathrm{i}}{4}H_0^{(1)}(k_0\mid x - y\mid)$,$x \neq y$,其中 $l = 1,2$.

由于算子 $\widetilde{K}_{l,0}: = \widetilde{K}_{ll,0} - K_{l,0}$,$\widetilde{K}'_{l,0}: = \widetilde{K}'_{ll,0} - K'_{l,0}$ 的核连续,所以是紧的.

于是 A 相应的延拓算子 $\widetilde{A}$ 可以写成如下形式:

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} S_{1,0} + \frac{1}{\lambda}S_1 & -K_{1,0} - K_1 & 0 & 0 \\ K'_{1,0} + K'_1 & -T_{1,0} - \lambda T_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_{3,0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_2 \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} \tilde S_{1,0}+\frac{1}{\lambda}\tilde S_1 & -\tilde K_{1,0}-\tilde K_1 & \tilde S_{31,0} & -\tilde S_{21,0} \\ N_1 & N_2 & N_3 & -\lambda \tilde K'_{21} \\ \tilde S_{13,0} & -\tilde K_{13,0} & \tilde S_{3,0} & 0 \\ -\frac{1}{\lambda}\tilde S_{12} & \tilde K_{12} & 0 & \tilde S_2 \end{pmatrix} :=$$

$\tilde A_0+\tilde A_c$.

其中 $N_1=\tilde K'_{1,0}+\tilde K'_1+\mathrm{i}\mu\tilde S_{11,0}$，$N_2=\tilde T_{1,0}+\lambda\tilde T_1-\mathrm{i}\mu\tilde K_{11,0}$，$N_3=\tilde K'_{31,0}+\mathrm{i}\mu\tilde S_{31,0}$.

定义：

$$Y:=H^{-1/2}(\partial D)\times H^{1/2}(\partial D)\times H^{-1/2}(\partial\Omega)\times H^{-1/2}(\partial D),$$
$$Y^*:=H^{1/2}(\partial D)\times H^{-1/2}(\partial D)\times H^{1/2}(\partial D)\times H^{1/2}(\partial D),$$

从而 $\tilde A: Y\to Y^*$ 是有界算子，并且对于 $\tilde\chi:=(\tilde a,\tilde b,\tilde c,\tilde e)^{\mathrm T}\in Y$，有：

$$(\tilde A_0\tilde\chi,\tilde\chi)=\langle S_{1,0}\tilde a,\tilde a\rangle+\langle\frac{1}{\lambda}S_1\tilde a,\tilde a\rangle-\langle K_{1,0}\tilde b,\tilde a\rangle-\langle K_1\tilde b,\tilde a\rangle+\langle K'_{1,0}\tilde a,\tilde b\rangle+\langle K'_1\tilde a,\tilde b\rangle-\langle T_{1,0}\tilde b,\tilde b\rangle-\langle\lambda T_1\tilde b,\tilde b\rangle+\langle S_{3,0}\tilde c,\tilde c\rangle+\langle S_2\tilde e,\tilde e\rangle.$$

由于 $K_{1,0}$ 和 $K'_{1,0}$ 拥有实核，所以它们互为共轭.

因此有：

$$\mathrm{Re}\lfloor-\langle K_{1,0}\tilde b,\tilde a\rangle-\langle K_1\tilde b,\tilde a\rangle+\langle K'_{1,0}\tilde a,\tilde b\rangle+\langle K'_1\tilde a,\tilde b\rangle\rfloor=0,$$

取 $(\tilde A_0\tilde\chi,\tilde\chi)$ 的实值部分，考虑到 λ 是一个正常数，有：

$$\mathrm{Re}(\tilde A_0\tilde\chi,\tilde\chi)\geqslant c(\|\tilde a\|^2+\|\tilde b\|^2+\|\tilde c\|^2+\|\tilde e\|^2),$$

因此 $\tilde A_0$ 是强制的.

由于 $\tilde\chi=[\tilde a,\tilde b,\tilde c,\tilde e]^{\mathrm T}$ 是 $\chi=[a,b,c,e]^{\mathrm T}\in X$ 的零延拓. 对于 $\tilde A_0$ 的限制算子 $\tilde A_{0r}: X\to X^*$. 由于 $\mathrm{Re}(\tilde A_{0r}\chi,\chi)=\mathrm{Re}(\tilde A_0\tilde\chi,\tilde\chi)$，所以 $\tilde A_{0r}$ 也是强制的.

另一方面，因为 $\tilde S_{l,0}$，$\tilde S_l$，$\tilde K_{l,0}$，$\tilde K_l$，$\tilde K'_{l,0}$，$\tilde K'_l$ 和 $\tilde T_{l,0}$，$\tilde T_l$ 都是紧算子，相应的限制算子仍然是紧的. 另外，$\tilde A_c$ 上其他的限制算子由于拥有连续核，因此也是紧的，故 $\tilde A_{cr}: X\to X^*$ 是紧的，从而算子 $A: X\to X^*$ 是强制算子 $\tilde A_{0r}$ 和紧算子 $\tilde A_{cr}$ 的和. 证毕.

定理 3　算子 $A: X\to X^*$ 是单射.

证明　设 $\chi:=[a,b,c,e]^{\mathrm T}$ 满足 $A\chi=0$. 接下来证明 $\chi=0$.

因 $A\chi=0$ 意味位势满足齐次方程，根据定理 2，知

$$\begin{cases} u^s=0, \text{in } D_0\setminus\bar\Sigma, \\ v=0, \text{in } D. \end{cases}$$

由 $\frac{\partial u^s}{\partial\nu}$ 在边界 $\Gamma:=\Sigma\setminus\Gamma_2$ 上的跳跃关系，有 $c\big|_\Gamma=\frac{\partial u^s}{\partial\nu}\Big|_{\Gamma^-}-\frac{\partial u^s}{\partial\nu}\Big|_{\Gamma^+}=0$. 所以位势 u^s 只定义在边界 Γ_2 上. 此时 $A\chi=0$ 可写为：

$$\begin{cases} \left(S_{11,0}+\frac{1}{\lambda}S_{11}\right)a-(K_{11,0}+K_{11})b+S_{21,0}c-S_{21}e=0, \\ (K'_{11,0}+\mathrm{i}\mu S_{11,0}+K'_{11})a-(T_{11,0}+\mathrm{i}\mu K_{11,0}+\lambda T_{11})b+ \\ \quad (K'_{21,0}+\mathrm{i}\mu S_{21,0})c-\lambda K'_{21}e=0, \\ S_{12,0}a-K_{12,0}b+S_{22,0}c=0, \\ -\frac{1}{\lambda}S_{12}a+K_{12}b+S_{22}e=0. \end{cases}$$

现在重新定义位势 u^s，v 形式如(2)和(3)式，但 u^s 定义在 D 上，v 定义在 D_0 上. u^s 和 v 在相应的区域满足 Helmholtz 方程. 利用单双层位势的跳跃关系，在边界 Γ_1 上：

$$u^s-v\,|_{\Gamma_1}=\left(S_{11,0}+\frac{1}{\lambda}S_{11}\right)a-(K_{11,0}+K_{11})b+S_{31,0}c-S_{21}e,$$

$$\frac{\partial u^s}{\partial\nu}+\mathrm{i}\mu u^s-\lambda\frac{\partial v}{\partial\nu}\Big|_{\Gamma_1}=(K'_{11,0}+\mathrm{i}\mu S_{11,0}+K'_{11})a-(T_{11,0}+\mathrm{i}\mu K_{11,0}+\lambda T_{11})b+(K'_{31,0}+\mathrm{i}\mu S_{31,0})c-\lambda K'_{21}e.$$

在 Γ_2 上：

$$\begin{cases} v\,|_{\Gamma_2^+}=-\frac{1}{\lambda}S_{12}a+K_{12}b+S_{22}e, \\ u^s\,|_{\Gamma_2^-}=S_{12,0}a-K_{12,0}b+S_{22,0}c. \end{cases}$$

根据上面 4 个式子，得到：

$$\begin{cases} \Delta u^s+k_0^2u^s=0, & \text{in } D, \\ \Delta v+k^2v=0, & \text{in } D_0, \\ v=0, & \text{on } \Gamma_2^+, \\ u^s=0, & \text{on } \Gamma_2^-, \\ u^s-v=0, \frac{\partial u^s}{\partial\nu}+\mathrm{i}\mu u^s-\lambda\frac{\partial v}{\partial\nu}=0, & \text{on } \Gamma_1. \end{cases}$$

与定理 1 的证明过程相似，上式只有唯一解，故

$$\begin{cases} u^s=0, & \text{in } D, \\ v=0, & \text{in } D_0. \end{cases}$$

因此：

$$\begin{cases} \frac{1}{\lambda}a = \left.\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{v}}\right|_{\Gamma_1^+} - \left.\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{v}}\right|_{\Gamma_1^-} = 0, \\ b = v|_{\Gamma_1^+} - v|_{\Gamma_1^-} = 0, \\ c = \left.\frac{\partial u^s}{\partial \boldsymbol{v}}\right|_{\Gamma_2^-} - \left.\frac{\partial u^s}{\partial \boldsymbol{v}}\right|_{\Gamma_2^+} = 0, \\ e = \left.\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{v}}\right|_{\Gamma_2^-} - \left.\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{v}}\right|_{\Gamma_2^+} = 0. \end{cases}$$

证得 $a = b = c = e = 0$,故 A 是单射.

结合定理1~3,根据Fredholm定理位势算子的性质,问题(1)存在唯一解,且满足:

$$\| u^s \|_{H^1((B_r \cap D_0) \setminus \bar{\Sigma})} + \| v \|_{H^1(D)} \leqslant \| f \|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} + \| g \|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} + \| h \|_{H^{\frac{1}{2}}(\Sigma)}.$$

参 考 文 献

[1] GUO J, YAN G Z. The inverse scattering problem for partially penetrable obstacles [J]. Applicable Analysis, 2018, 97(9): 1549-1564.

[2] CRANGANU-CRETU B, HIPTMAIR R. Direct boundary integral equation method for electromagnetic scattering by partly coated dielectric objects [J]. Computing and Visualization in Science, 2005, 8(10): 145-158.

[3] GUO J, WU H, XIAO L. The direct and inverse elastic scattering problems for two scatterers in contact [J]. Communications in Mathematical Sciences, 2018, 16(3): 857-877.

[4] COLTON D, KRESS R. Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory [M]. 2nd ed. Berlin: Springer, 1998: 147.

[5] COLTON D, KRESS R. Integral equation methods in scattering theory [M]. New York: Springer-Verlag, 1983: 50-110.

[6] CAKONI F, COLTON D, MONK P. The direct and inverse scattering problems for partially coated obstacles [J]. Inverse Problems, 2001, 17(6): 1997-2015.

[7] MCLEAN W. Strongly elliptic systems and boundary integral equations [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2000: 113-156.

(责任编辑 曹东)