# 带有耦合 Rellich 项的临界双调和方程组解的存在性

康东升[1],田丹丹[1],马玉恒[1],曹玉平[2]

(1 中南民族大学 数学与统计学学院,武汉 430074; 2 中南民族大学 图书馆,武汉 430074)

**摘　要**　研究了包含多重 Rellich 项和强耦合临界非线性项的两类临界双调和方程组,首先研究了相关最佳 Sobolev 常数的达到函数对;其次,在一定的假设条件,利用变分法的山路定理证明了非平凡解的存在性. 本文中的双调和方程组是首次被研究,所得到的结果都是新的.

**关键词**　临界双调和方程组;最佳 Sobolev 常数;达到函数对;变分法

**中图分类号**　O175.25　**文献标志码**　A　**文章编号**　1672-4321(2020)02-0210-05

**doi:** 10.12130/znmdzk.20200217

**引用格式**　康东升,田丹丹,马玉恒,等.带有耦合 Rellich 项的临界双调和方程组解的存在性[J].中南民族大学学报(自然科学版),2020,39(2):210-214.

KANG Dongsheng, TIAN Dandan, MA Yuheng, et al. Existence of solutions to critical biharmonic systems involving coupled Rellich terms[J].Journal of South-Central University for Nationalities(Natural Science Edition), 2020,39(2):210-214.

# Existence of solutions to critical biharmonic systems involving coupled Rellich terms

KANG Dongsheng[1],TIAN Dandan[1], MA Yuheng[1],CAO Yuping[2]

(1 College of Mathematics and Statistics, South-Central University for Nationalities, Wuhan 430074,China;
2 Library, South-Central University for Nationalities, Wuhan 430074,China)

**Abstract**　We study two kinds of critical biharmonic systems, which involve multiple Rellich-type terms and strongly-coupled critical nonlinearities. Firstly, we investigate the minimizers of extremal function to the related best Sobolev constant. Secondly, under certain assumptions, we prove the existence of the nontrivial solutions by the Mountain-Pass Theorem of variational methods. The biharmonic systems in this paper are studied for the first time and the conclusions obtained are all new.

**Keywords**　critical biharmonic system; the best Sobolev constant; minimizer of extremal function; variational method

## 1　相关知识

在本文中,首先研究了下列双调和方程组:

$$\begin{cases}\Delta^2 u-\dfrac{\mu_1 u+\lambda v}{|x|^4}=\dfrac{\alpha}{2^*(s)}\dfrac{u^{\alpha-1}v^{\beta}}{|x|^s},\\ \Delta^2 v-\dfrac{\lambda u+\mu_2 v}{|x|^4}=\dfrac{\beta}{2^*(s)}\dfrac{u^{\alpha}v^{\beta-1}}{|x|^s},\\ u,v\in D^{2,2}(\mathbb{R}^N),u,v>0,x\in\mathbb{R}^N\setminus\{0\}.\end{cases}\tag{1}$$

其中参数满足下列假设:

$(\mathrm{H}_1)$ $N\geqslant 5,\lambda>0,0<\mu_2\leqslant\mu_1<\bar{\mu},\mu^*<\bar{\mu},0\leqslant s<4,1<\beta\leqslant\alpha,\alpha+\beta=2^*(s),A=B$,

这里 $D^{2,2}(\mathbb{R}^N)$ 是 $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ 关于范数 $\left(\int_{\mathbb{R}^N}|\Delta\cdot|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$ 的完备化空间,

$$A:=\frac{2\lambda}{\sqrt{(\mu_1-\mu_2)^2+4\lambda^2}+(\mu_1-\mu_2)},$$

**收稿日期**　2019-10-11

**作者简介**　康东升(1967-),男,教授,博士,研究方向:偏微分方程,E-mail: dongshengkang@scuec.edu.cn

**基金项目**　国家自然科学基金资助项目(11601530);中南民族大学研究生创新基金项目(3212020sycxjj305)

$$\mu^*:=\mu_1+\lambda A=\mu_2+\frac{\lambda}{A},B=\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}},$$

$$2^*(S):=\frac{2(N-s)}{N-4},\bar{\mu}:=\left(\frac{N(N-4)}{4}\right)^2,$$

注意到 $2^*(S)$ 是 Rellich-Sobolev 临界指数，$\bar{\mu}$ 是下列 Rellich 不等式中的最佳常数[1]：

$$\int_{\mathbb{R}^N}\frac{u^2}{|x|^4}dx\leqslant\frac{1}{\bar{\mu}}\int_{\mathbb{R}^N}|\Delta u|^2dx,\forall u\in D^{2,2}(\mathbb{R}^N),$$

根据 Rellich 不等式可知，当 $\mu<\bar{\mu}$ 时 $L:=\left(-\Delta^2\cdot-\mu\frac{\cdot}{|x|^4}\right)$ 是正算子.

设 $H:=D_0^{2,2}(\Omega)$ 是 $C_0^\infty(\Omega)$ 关于范数 $\left(\int_\Omega|\Delta\cdot|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}$ 的完备化空间，我们在积空间 $H\times H$ 再考虑第 2 个方程组：

$$\begin{cases}\Delta^2u-\dfrac{\mu_1u+\lambda v}{|x|^4}=\dfrac{\alpha}{2^*(s)}\dfrac{u^{\alpha-1}v^\beta}{|x|^s}+a_1u,x\in\Omega\backslash\{0\},\\ \Delta^2v-\dfrac{\lambda\mu+\mu_2v}{|x|^4}=\dfrac{\beta}{2^*(s)}\dfrac{u^\alpha v^{\beta-1}}{|x|^s}+a_2v,x\in\Omega\backslash\{0\},\\ u=v=\dfrac{\partial u}{\partial n}=\dfrac{\partial v}{\partial n}=0,x\in\partial\Omega,\end{cases}\tag{2}$$

其中 $\Omega\subset\mathbb{R}^N(N\geqslant5)$ 是包含原点的有界光滑区域，$\frac{\partial}{\partial n}$ 是外法向导数，$a_1,a_2>0$.

当 $(H_1)$ 成立时，矩阵 $E=\begin{pmatrix}\mu_1&\lambda\\ \lambda&\mu_2\end{pmatrix}$ 是正定的，$0<\gamma_1<\gamma_2<\bar{\mu}$，并且对任意的 $(u,v)\in D^{2,2}(\mathbb{R}^N)\times D^{2,2}(\mathbb{R}^N)$ 都有：

$$\gamma_1(u^2+v^2)\leqslant\mu_1u^2+2\lambda uv+\mu_2v^2\leqslant\gamma_2(u^2+v^2),$$

其中 $\gamma_1$ 和 $\gamma_2$ 是矩阵 $E$ 的特征值.

可以定义下列最佳常数：

$$S(\mu^*):=\inf_{u\in D^{2,2}(\mathbb{R}^N)\backslash\{0\}}\frac{\int_{\mathbb{R}^N}\left(|\Delta u|^2-\mu^*\frac{u^2}{|x|^4}\right)dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u|^{2^*(s)}}{|x|^s}dx\right)^{\frac{2}{2^*(s)}}},$$

$0\leqslant\mu^*<\bar{\mu}$，

由文献[2]可知，$S(\mu^*)$ 的达到函数是：

$$V_{\mu^*}^\varepsilon(x):=\varepsilon^{\frac{4-N}{2}}U_{\mu^*}(\varepsilon^{-1}x),\forall\varepsilon>0,\tag{3}$$

这里 $U_{\mu^*}(x)>0$ 是一个径向对称的递减函数，满足：

$$\int_{\mathbb{R}^N}\left(|\Delta V_{\mu^*}^\varepsilon(x)|^2-\mu^*\frac{|V_{\mu^*}^\varepsilon(x)|^2}{|x|^4}\right)dx=\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|V_{\mu^*}^\varepsilon(x)|^{2^*(s)}}{|x|^s}dx=S(\mu^*)^{\frac{N-s}{4-s}}.$$

根据 Rellich，Sobolev 和 Young 不等式[3-5]，可以定义下列最佳常数：

$$S(\mu_1,\mu_2,\lambda):=\inf_{(u,v)\in(D^{2,2}(\mathbb{R}^N)\backslash\{0\})^2}\left[\int_{\mathbb{R}^N}\left(|\Delta u|^2+|\Delta v|^2-\frac{\mu_1u^2+2\lambda uv+\mu_2v^2}{|x|^4}\right)dx\right]\Big/\left(\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u|^\alpha|v|^\beta}{|x|^s}dx\right)^{\frac{2}{2^*(s)}},\tag{4}$$

在积空间 $H\times H$ 上，方程组(2)对应的能量泛函是：

$$J(u,v):=\frac{1}{2}\int_\Omega\left(|\Delta u|^2+|\Delta v|^2-\frac{\mu_1u^2+2\lambda uv+\mu_2v^2}{|x|^4}\right)dx-\frac{1}{2^*(s)}\int_\Omega\frac{u^\alpha v^\beta}{|x|^s}dx-\frac{1}{2}\int_\Omega(a_1u^2+a_2v^2)dx,$$

其中 $J\in C^1(H\times H,\mathbb{R})$. 在积空间 $H\times H$ 和它的对偶空间 $(H\times H)^{-1}$ 中定义对偶积：

$$\langle J'(u,v),(\phi,\varphi)\rangle:=\int_\Omega\left(\Delta u\Delta\phi+\Delta v\Delta\varphi-\frac{\mu_1u\phi+\lambda v\phi+\lambda u\varphi+\mu_2v\varphi}{|x|^4}\right)dx-\int_\Omega\left(\frac{\alpha}{2^*(s)}\frac{u^{\alpha-1}v^\beta}{|x|^s}\phi+\frac{\beta}{2^*(s)}\frac{u^\alpha v^{\beta-1}}{|x|^s}\varphi\right)dx-\int_\Omega(a_1u\phi+a_2v\varphi)dx,$$

这里 $J'(u,v)$ 表示能量泛函 $J$ 在点 $(u,v)$ 的 Fréchet 导数，$(u,v),(\phi,\varphi)\in H\times H$. 如果 $(u,v)\in H\times H\backslash\{(0,0)\}$ 满足：

$$\langle J'(u,v),(\phi,\varphi)\rangle=0,\forall(\phi,\varphi)\in H\times H,$$

则称 $(u,v)$ 为方程组(2)的解. 在方程组的所有解中，能量最小的解称为基态解.

定义下列函数和常数：

$$f(t):=t^{-\frac{2\beta}{2^*(s)}}+t^{\frac{2\alpha}{2^*(s)}},t>0.$$

$$b(\mu):=\delta(2-\phi(u)),\mu\in[0,\bar{\mu}],\delta:=\frac{N-4}{2}.$$

$$\phi(\mu):=1-\frac{\sqrt{N^2-4N+8-4\sqrt{(N-2)^2+\mu}}}{N-4},\mu\in[0,\bar{\mu}).$$

$$\zeta:=\frac{1}{16}(N^2-16)(N^2-8N),N\geqslant9.$$

设 $\Lambda_1(\mu^*)$ 是算子 $L$ 的第一特征值，定义如下：

$$\Lambda_1(\mu):=\inf_{u\in D^{2,2}(\Omega)\backslash\{0\}}\frac{\int_\Omega\left(|\Delta u|^2-\mu\frac{u^2}{|x|^4}\right)dx}{\int_\Omega u^2dx},\mu\in$$

$(-\infty,\bar{\mu})$.

考虑下面的条件:

$(H_2)$ $N\geqslant 9,\mu^*\leqslant\zeta,0<a_1,a_2<\Lambda_1(\mu^*)$.

本文的主要结果可以归纳为以下定理:

**定理1** 假设$(H_1)$成立,则有$S(\mu_1,\mu_2,\lambda)=f(A)S(\mu^*)$,并且$S(\mu_1,\mu_2,\lambda)$具有达到函数对$\{C(V^{\varepsilon}_{\mu^*}(x),AV^{\varepsilon}_{\mu^*}(x)),C,\varepsilon>0\}$.

**定理2** 假设$(H_1)$,$(H_2)$成立,则方程组(2)存在一个非平凡解$(u_0,v_0)\in(H\backslash\{0\})^2$.

为方便起见我们用$C$表示正常数,有时省略积分式中的$dx$. 对任意$t>0$和充分小的$\varepsilon>0$,$o(1)$表示一个无穷小量,$O(\varepsilon^t)$表示满足不等式$|O(\varepsilon^t)|/\varepsilon^t<C$的量,$O_1(\varepsilon^t)$表示存在正常数$C_1$,$C_2$使得$C_1\varepsilon^t\leqslant O_1(\varepsilon^t)\leqslant C_2\varepsilon^t$,$o(\varepsilon^t)$表示当$\varepsilon\to 0^+$时$|o(\varepsilon^t)|/\varepsilon^t\to 0$.

## 2 定理1的证明

**定理1的证明** 假设$(H_1)$成立,直接计算可得:

$$\mu^*:=\frac{\mu_1+2\lambda A+\mu_2A^2}{1+A^2},$$

$$\min_{t>0}f(t)=f(t_{\min}),t_{\min}=B=\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}.$$

任取$w\in D^{2,2}(\mathbb{R}^N)\backslash\{0\}$. 在(4)式中取检验函数对$(u,v)=(w,Aw)$,可以得出:

$$S(\mu_1,\mu_2,\lambda)\leqslant f(A)\frac{\int_{\mathbb{R}^N}\left(|\Delta w|^2-\mu^*\frac{w^2}{|x|^4}\right)}{\left(\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|w|^{2^*(s)}}{|x|^s}\right)^{\frac{2}{2^*(s)}}},$$

在上式中对$w\in D^{2,2}(\mathbb{R}^N)\backslash\{0\}$取下确界即得:

$$S(\mu_1,\mu_2,\lambda)\leqslant f(A)S(\mu^*).\quad(5)$$

设$\{(u_n,v_n)\}\subset D$是$S(\mu_1,\mu_2,\lambda)$的极小化序列,令$z_n=s_nv_n$,其中:

$$s_n=\left(\frac{\int_{\mathbb{R}^N}|u_n|^{2^*(s)}/|x|^s}{\int_{\mathbb{R}^N}|v_n|^{2^*(s)}/|x|^s}\right)^{\frac{1}{2^*(s)}},$$

于是就有:

$$\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|z_n|^{2^*(s)}}{|x|^s}=\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u_n|^{2^*(s)}}{|x|^s},\quad(6)$$

由Young不等式可得:

$$\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u_n|^{\alpha}|z_n|^{\beta}}{|x|^s}\leqslant\frac{\alpha}{2^*(s)}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u_n|^{2^*(s)}}{|x|^s}+\frac{\beta}{2^*(s)}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|z_n|^{2^*(s)}}{|x|^s},$$

由(6)式可以得到:

$$\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u_n|^{\alpha}|z_n|^{\beta}}{|x|^s}\leqslant\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u_n|^{2^*(s)}}{|x|^s}=\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|z_n|^{2^*(s)}}{|x|^s},$$

所以:

$$\frac{\int_{\mathbb{R}^N}\left(|\Delta u_n|^2+|\Delta v_n|^2-\frac{\mu_1u_n^2+2\lambda u_nv_n+\mu_2v_n^2}{|x|^4}\right)}{\left(\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u_n|^{\alpha}|v_n|^{\beta}}{|x|^s}\right)^{\frac{2}{2^*(s)}}}\geqslant$$

$$\frac{\int_{\mathbb{R}^N}\left(|\Delta u_n|^2+|\Delta v_n|^2-(\mu_1+\lambda A)\frac{u_n^2}{|x|^4}-\left(\mu_2+\frac{\lambda}{A}\right)\frac{v_n^2}{|x|^4}\right)}{\left(S_n^{-\beta}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u_n|^{2^*(s)}}{|x|^s}\right)^{\frac{2}{2^*(s)}}}\geqslant$$

$$\frac{\int_{\mathbb{R}^N}\left(|\Delta u_n|^2-\mu^*\frac{u_n^2}{|x|^4}\right)}{\left(S_n^{-\beta}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u_n|^{2^*(s)}}{|x|^s}\right)^{\frac{2}{2^*(s)}}}+S_n^{-2}\frac{\int_{\mathbb{R}^N}\left(|\Delta z_n|^2-\mu^*\frac{z_n^2}{|x|^4}\right)}{\left(S_n^{-\beta}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|z_n|^{2^*(s)}}{|x|^s}\right)^{\frac{2}{2^*(s)}}}\geqslant$$

$f(s_n^{-1})S(\mu^*)\geqslant f(B)S(\mu^*)$.

因为$f(A)=f(B)$,当$n\to\infty$时得出:

$$S(\mu_1,\mu_2,\lambda)\geqslant f(B)S(\mu^*)=f(A)S(\mu^*),\quad(7)$$

由(5)和(7)式得出:

$$S(\mu_1,\mu_2,\lambda)=f(A)S(\mu^*),\forall\mu^*\in(0,\bar{\mu}).$$

这表明$S(\mu_1,\mu_2,\lambda)$具有达到函数对$\{C(V^{\varepsilon}_{\mu^*}(x),AV^{\varepsilon}_{\mu^*}(x)),C,\varepsilon>0\}$.

## 3 定理2的证明

**引理1** 假设$(H_1)$,$(H_2)$成立,则对任意的$c<c^*:=\frac{4-s}{2(N-s)}(S(\mu_1,\mu_2,\lambda))^{\frac{N-s}{4-s}}$,能量泛函$J$满足$(PS)_c$条件.

**证明** 假设序列$\{(u_n,v_n)\}\subset H\times H$满足:$J(u_n,v_n)\to c,J'(u_n,v_n)\to 0$在对偶空间$(H\times H)^{-1}$上,

易证序列$\{(u_n,v_n)\}$在$H\times H$中有界,则存在$\{(u_n,v_n)\}$的子序列,我们仍记为$\{(u_n,v_n)\}$,存在$(u,v)\in H\times H$,使得:

$$\begin{cases}(u_n,v_n)\rightharpoonup(u,v),\text{在}H\times H\text{中},\\(u_n,v_n)\to(u,v),\text{a.e.在}\Omega\text{中},\\(u_n,v_n)\rightharpoonup(u,v),\text{在}L^2(\Omega,|x|^{-4})\times L^2(\Omega,|x|^{-4})\text{中},\\(u_n,v_n)\to(u,v),\text{在}L^{q_1}_{loc}(\Omega)\times L^{q_2}_{loc}(\Omega)\text{中},\\\forall q_1,q_2\in[1,2^*(s)).\end{cases}$$

由集中紧性原理[6,7],存在至多可数集合 $\bar{J}$,点 $x_j\in\Omega\backslash\{0\}$,实数 $\sigma_0,v_0,\rho_0,\sigma_{x_j},\rho_{x_j},j\in\bar{J}$,使得下列收敛性在测度意义下成立:

$$|\Delta u_n|^2+|\Delta v_n|^2\rightharpoonup \mathrm{d}\sigma\geqslant|\Delta u|^2+|\Delta v|^2+\sigma_0\delta_0+\sum_{j\in J}\sigma_{x_j}\delta_{x_j},\tag{8}$$

$$\frac{\mu_1u_n^2+2\lambda u_nv_n+\mu_2v_n^2}{|x|^4}\rightharpoonup\mathrm{d}v=\frac{\mu_1u^2+2\lambda uv+\mu_2v^2}{|x|^4}+v_0\delta_0,\tag{9}$$

$$F(u_n,v_n)\rightharpoonup\mathrm{d}\rho=F(u,v)+\rho_0\delta_0,\tag{10}$$

其中 $\delta_x$ 表示在点 $x$ 处的 Dirac 质量,$F(u,v)=\frac{|u|^\alpha|v|^\beta}{|x|^s}$. 由(8) ~(10)式可得:

$$\sigma_0-v_0\geqslant S(\mu_1,\mu_2,\lambda)(\rho_0)^{\frac{2}{2^*(s)}},\tag{11}$$

$$\sigma_{x_j}\geqslant S(0,0,0)(\rho_{x_j})^{\frac{2}{2^*(s)}},j\in\bar{J}.\tag{12}$$

先考虑在原点的情况. 当 $\varepsilon>0$ 足够小时,取截断函数 $\phi_\varepsilon\in C_0^\infty(B_\varepsilon(0))$ 使得在球 $B_{\varepsilon/2}(0)$ 中 $\phi_\varepsilon=1$ 并且 $0\leqslant\phi(\varepsilon)\leqslant1$, $|\Delta\phi_\varepsilon|\leqslant\frac{2}{\varepsilon}$,则有:

$$\lim_{\varepsilon\to0}\lim_{n\to\infty}\int_\Omega(|\Delta u_n|^2+|\Delta v_n|^2)\phi_\varepsilon=\lim_{\varepsilon\to0}\int_\Omega\phi_\varepsilon\mathrm{d}\sigma\geqslant\sigma_0,$$

$$\lim_{\varepsilon\to0}\lim_{n\to\infty}\int_\Omega\frac{\mu_1u_n^2+2\lambda u_nv_n+\mu_2v_n^2}{|x|^4}\phi_\varepsilon=\lim_{\varepsilon\to0}\int_\Omega\phi_\varepsilon\mathrm{d}v=v_0,$$

$$\lim_{\varepsilon\to0}\lim_{n\to\infty}\int_\Omega F(u_n,v_n)\phi_\varepsilon=\lim_{\varepsilon\to0}\int_\Omega\phi_\varepsilon\mathrm{d}\rho=\rho_0,$$

$$\lim_{\varepsilon\to0}\lim_{n\to\infty}\left(\int_\Omega u_n\Delta u_n\Delta\phi_\varepsilon\right)=\lim_{\varepsilon\to0}\lim_{n\to\infty}\left(\int_\Omega v_n\Delta v_n\Delta\phi_\varepsilon\right)=0,$$

因此有:

$$0=\lim_{\varepsilon\to0}\lim_{n\to\infty}\langle J'(u_n,v_n),(u_n\phi_\varepsilon,v_n\phi_\varepsilon)\rangle\geqslant\sigma_0-v_0-\rho_0.\tag{13}$$

根据(11)和(13)式可知 $S(\mu_1,\mu_2,\lambda)\rho_0^{\frac{2}{2^*(s)}}\leqslant\rho_0$,由此可以推出:

$$\rho_0=0\text{ 或 }\rho_0\geqslant S(\mu_1,\mu_2,\lambda)^{\frac{N-s}{4-s}}.\tag{14}$$

接下来考虑在点 $x_j(j\in\bar{J})$ 处的情况. 取 $\varepsilon>0$ 足够小,截断函数 $\varphi_\varepsilon\in C_0^\infty(B_\varepsilon(x_j))$,使得在 $B_{\varepsilon/2}(x_j)$ 中 $\varphi_\varepsilon=1$ 并且 $0\leqslant\varphi_\varepsilon\leqslant1$, $|\Delta\varphi_\varepsilon|\leqslant\frac{2}{\varepsilon}$,则有:

$$\lim_{\varepsilon\to0}\lim_{n\to\infty}\int_\Omega\frac{\mu_1u_n^2+2\lambda u_nv_n+\mu_2v_n^2}{|x|^4}\varphi_\varepsilon=\lim_{\varepsilon\to0}\int_\Omega\varphi_\varepsilon\mathrm{d}v=0,$$

类似于(13)式,可得:

$$0=\lim_{\varepsilon\to0}\lim_{n\to\infty}\langle J'(u_n,v_n),(u_n\varphi_\varepsilon,v_n\varphi_\varepsilon)\rangle\geqslant\sigma_{x_j}-\rho_{x_j},\tag{15}$$

由(12)和(15)式可得 $S(0,0,0)(\rho_{x_j})^{\frac{2}{2^*(s)}}\leqslant\rho_{x_j}$,由此可以推出:

$$\rho_{x_j}=0\text{ 或 }\rho_{x_j}\geqslant S(0,0,0)^{\frac{N-s}{4-s}}>S(\mu_1,\mu_2,\lambda)^{\frac{N-s}{4-s}},\tag{16}$$

于是集合 $\bar{J}$ 必为有限集.

另一方面,由于:

$$c=J(u,v)-\frac{1}{2}\langle J'(u_n,v_n),(u_n,v_n)\rangle+o(1)=\frac{4-s}{2(N-s)}\int_{\mathbb{R}^N}F(u_n,v_n)+o(1)=\frac{4-s}{2(N-s)}\int_{\mathbb{R}^N}F(u_n,v_n)+\rho_0+\sum_{j\in J}\rho_{x_j},\tag{17}$$

由(14) ~(17)式和条件 $c<c^*$ 可知 $\rho_0=\rho_{x_j}=0,\forall j\in\bar{J}$,则在空间 $H\times H$ 上子列 $(u_n,v_n)$ 强收敛到 $(u,v)$. 证毕.

选取截断函数 $\varphi(x)=\varphi(|x|)\in C_0^\infty(B_\rho(0))$ 其中 $B_\rho(0)\in\Omega,\rho>0$ 且足够小,使得在球形 $B_\rho(0)$ 中有 $0\leqslant\varphi(x)\leqslant1$, $B_{\rho/2}(0)$ 中有 $\varphi(x)=1$. 设 $u_\varepsilon(x)=\varphi(x)V_{\mu^*}^\varepsilon(x)$,其中 $V_{\mu^*}^\varepsilon(x)$ 是(3)式中所定义的达到函数.

**引理 2**[2]　假设 $N\geqslant5,\mu^*\in[0,\bar{\mu})$,则当 $\varepsilon\to0$ 时下列估计成立:

$$\int_\Omega\left(|\Delta u_\varepsilon|^2-\mu^*\frac{|u_\varepsilon|^2}{|x|^4}\right)=S(\mu^*)^{\frac{N-2}{4-s}}+O(\varepsilon^{2(b(\mu^*)-\delta)}),$$

$$\int_\Omega\frac{|u_\varepsilon|^{2^*(s)}}{|x|^s}=S(\mu^*)^{\frac{N-s}{4-s}}+O(\varepsilon^{2^*(b(\mu^*)-\delta)}),$$

进一步地,当 $N\geqslant9$ 时:

$$\int_\Omega|u_\varepsilon|^2=\begin{cases}O_1(\varepsilon^4),0\leqslant\mu^*<\zeta,\\O_1(\varepsilon^4|\ln\varepsilon|),\mu^*=\zeta.\end{cases}$$

**引理 3**　存在函数对 $(\tilde{u},\tilde{v})\in H\times H\backslash\{(0,0)\}$,使得:

$$\sup_{t\geqslant0}J(t\tilde{u},t\tilde{v})<c^*=\frac{4-s}{2(N-s)}(S(\mu_1,\mu_2,\lambda))^{\frac{N-s}{4-s}}$$

**证明**　定义函数:

$$g(t):=J(tu_\varepsilon,tAu_\varepsilon)=\frac{t^2}{2}\int_\Omega(1+A^2)\left[\left(|\Delta u_\varepsilon|^2-\mu^*\frac{u_\varepsilon^2}{|x|^4}\right)-\frac{a_1+a_2A^2}{1+A^2}|u_\varepsilon|^2\right]-$$

$\frac{t^{2^*(s)}}{2^*(s)}\int_{\Omega} A^{\beta}\frac{|u_\varepsilon|^{2^*(s)}}{|x|^s}$,

则有 $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = -\infty$,且当 $t\to 0$ 时,$g(t)>0$,所以由 $g'(t_\varepsilon)=0$ 可得出 $\sup\limits_{t\geqslant 0} g(t)$ 在某有限值点 $t_\varepsilon>0$ 处取得,并且 $C'<t_\varepsilon<C''$,其中 $C'$ 和 $C''$ 是与 $\varepsilon$ 无关的正常数;另一方面,

$$0\leqslant \mu^* \leqslant \zeta \Leftrightarrow b(\mu^*)-\delta \geqslant 2,$$

$\max\limits_{t\geqslant 0}\left(\frac{t^2}{2}B_1-\frac{t^{2^*(s)}}{2^*(s)}B_2\right) = \frac{4-s}{2(N-s)}\left(B_1 B_2^{-\frac{2}{2^*(s)}}\right)^{\frac{N-s}{4-s}}$,

$B_1, B_2>0$.

所以有:

$g(t_\varepsilon)\leqslant$

$\frac{4-s}{2(N-s)}\left\{\left[f(A)\cdot\int_{\Omega}\left(|\Delta u_\varepsilon|^2-\mu^*\frac{|u_\varepsilon|^2}{|x|^4}-\right.\right.\right.$

$\left.\left.\left.\frac{a_1+a_2A^2}{1+A^2}|u_\varepsilon|^2\right)\right]\Big/\left[\int_{\Omega}\left(|u_\varepsilon|^{2^*(s)}/|x|^s\right)\frac{2}{2^*(s)}\right]\right\}^{\frac{N-s}{4-s}}\leqslant$

$\frac{4-s}{2(N-s)}\{[f(A)\cdot(S(\mu^*)^{\frac{N-s}{4-s}}+O(\varepsilon^{2(b(\mu^*)-\delta)})-$

$O_1\int_{\Omega}|u_\varepsilon|^2)]/[S(\mu^*)^{\frac{N-4}{4-s}}+O(\varepsilon^{2^*(s)(b(\mu^*)-\delta)})]\}^{\frac{N-s}{4-s}}\leqslant$

$\frac{4-s}{2(N-s)}(f(A)S(\mu^*))^{\frac{N-s}{4-s}}+O(\varepsilon^{2(b(\mu^*)-\delta)})-$

$O_1(\varepsilon^4) < \frac{4-s}{2(N-s)}(S(\mu_1,\mu_2,\lambda))^{\frac{N-s}{4-s}}$.

**定理2的证明** 由山路引理[8,9],引理1和引理3可知,存在能量泛函 $J$ 的一个非零临界点 $(u_0,v_0)\in H\times H$,它也是双调和方程组(2)的一个解;另外由假设$(\mathrm{H}_2)$中的条件 $a_1\neq 0, a_2\neq 0$,可知 $(u_0,v_0)\neq(0,0)$. 定理2证毕.

## 参考文献


[1] RELLICH F. Perturbation theory of eigenvalue problems [M]. New York: New York University, 1954.

[2] KANG D, XU L. Asymptotic behavior and existence results for the biharmonic problems involving Rellich potentials [J]. J Math Anal Appl, 2017, 455: 1365-1382.

[3] BHAKTA M, MUSINA R. Entire solutions for a class of variational problems involving the biharmonic operator and Rellich potentials [J]. Nonlinear Anal, 2012, 75: 3836-3848.

[4] ABDELLAOUI B, FELLI V, PERAL I. Existence and nonexistence results for quasilinear elliptic equations involving the p-Laplacian with a critical potential [J]. Ann Mat Pura Appl, 2003, 182: 247-270.

[5] CHEN Z, ZOU W. Existence and symmetry of positive ground states for a doubly critical Schrödinger system [J]. Trans Amer Math Soc, 2015, 367(5): 3599-3646.

[6] LIONS P L. The concentration compactness principle in the calculus of variations, the limit case (I) [J]. Rev Mat Iberoamericana, 1985, 1(1): 145-201.

[7] LIONS P L. The concentration compactness principle in the calculus of variations, the limit case (II) [J]. Rev Mat Iberoamericana, 1985, 1(2): 45-121.

[8] AMBMBROSETTI A, RABINOWITZ H. Dual variatonal methods in critical point theory and applications [J]. J Funct Anal, 1973, 14(2): 349-381.

[9] BREZIS H, NIRRENBERG L. Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents [J]. Comm Pure Appl Math, 1983, 36(2): 437-477.


(责任编辑 曹东)